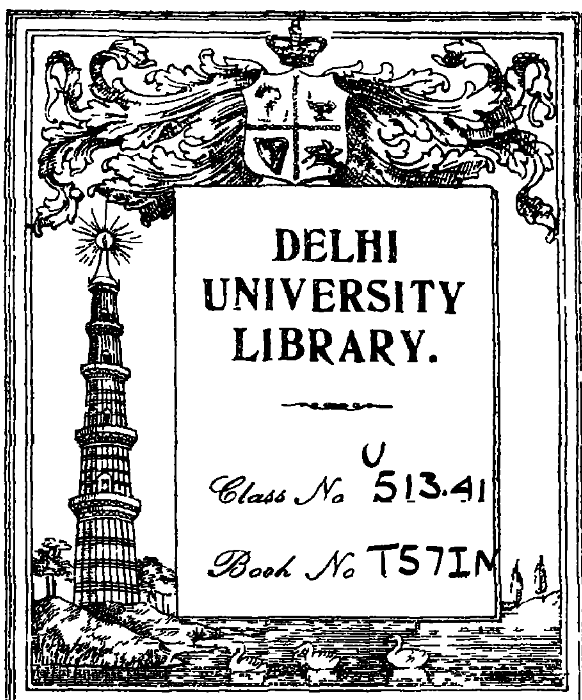
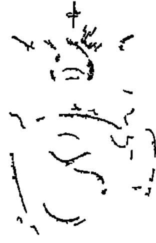

DELHI
UNIVERSITY
LIBRARY.
Class No U 513.41
Book No T57IN



سلسلۂ نصابیات علمیۂ جامعۂ عثمانیہ

عِلم مثلث کُروی

تصنیف

آئی۔ ٹاڈہنٹر، ایم۔ اے، ایف۔ آر۔ ایس

نظر ثانی

جے۔ جی۔ لیتھم، ایم۔ اے، ڈی۔ ایس سی

مترجمہ

محمد نذیر الدین، ایم۔ اے (عثمانیہ)

رکن شعبۂ تالیف و ترجمہ جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی

سنہ ۱۳۵۱ھ م سنہ ۱۳۴۱ف م سنہ ۱۹۳۲ء

دار الطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

یہ کتاب مسرز میکملن اینڈ کمپنی پبلشرز کی اجازت سے
جن کو حقِ اشاعت حاصل ہے اردو میں
ترجمہ کر کے طبع و شایع کی گئی ہے۔

فہرستِ مضامین

علم مثلث کروی

(۱)

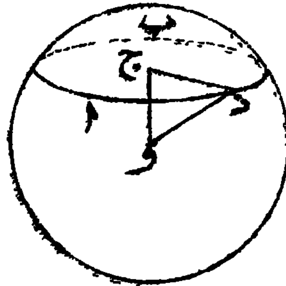
علم مثلث کروی

پہلا باب

بڑے اور چھوٹے دائرے

۱ — **تعریف** ۔ کرہ وہ مجسم ہے جس کی سطح کا ہر نقطہ ایک ثابت نقطے سے جسکو مرکز کہتے ہیں مساوی فاصلہ پر رہتا ہے ۔ وہ خط مستقیم جو سطح کے کسی نقطہ کو مرکز سے ملائے **نصف قطر** کہلاتا ہے اور وہ خط مستقیم جو مرکز میں سے گزرتا ہوا دونوں طرف کرہ کی سطح پر ختم ہو **قطر** کہلاتا ہے ۔

۲ — **کرہ کی سطح کی ہر مستوی تراش دائرہ ہوتی ہے ۔**



فرض کرو کہ کوئی مستوی کرہ کی سطح کو تراش ا ب میں قطع کرتا ہے اور کرہ کا مرکز و ہے۔ قاطع مستوی پر عمود و ج کھینچو، تراش میں کوئی نقطہ د لو اور و د، ج د کو ملاؤ۔ اب چونکہ و ج مستوی پر عمود ہے، زاویہ و ج د زاویہ قائمہ ہے، اسلئے ج د = $\sqrt{}$ و د² - و ج² ۔ پھر چونکہ و اور ج ثابت نقطے ہیں اس لئے و ج مستقل ہے نیز و د مستقل ہے کیونکہ یہ کرہ کا نصف قطر ہے، اس لئے ج د مستقل ہے۔ اس طرح مستوی تراش کے تمام نقطے ثابت نقطہ ج سے مساوی فاصلے پر ہیں، اس لئے یہ تراش دائرہ ہے جس کا مرکز ج ہے۔ (۲)

۳ ـــ تعریفات۔ اگر کرہ کو قطع کرنے والا مستوی کرہ کے مرکز میں سے گزرے تو تراش کو **بڑا دائرہ** کہتے ہیں لیکن اگر مستوی کرہ کے مرکز میں سے نہ گزرے تو تراش کو **چھوٹا دائرہ** کہتے ہیں۔ اس طرح بڑے دائرہ کا نصف قطر کرہ کے نصف قطر کے مساوی ہوتا ہے۔

۴ ـــ کرہ کے مرکز اور اسکی سطح پر کے کسی دو نقطوں میں سے ایک مستوی کھینچا جا سکتا ہے اور صرف ایک ہی مستوی کھینچا جا سکتا ہے سوا ے اس صورت کے جبکہ یہ دو نقطے قطر کے سرے ہوں، اور تب ایسے مستوی تعداد میں لا انتہا کھینچے جا سکتے ہیں۔ پس کرہ کی سطح پر کے کسی دو مفروضہ نقطوں میں سے صرف ایک بڑا دائرہ کھینچا جا سکتا ہے سوائے اس صورت کے جبکہ یہ دو نقطے قطر کے سرے ہوں۔ جب دو دئے ہوئے نقطوں میں سے صرف ایک بڑا دائرہ کھینچ سکے تو ان نقطوں پر یہ دائرہ دو غیر مساوی حصوں میں تقسیم ہوتا ہے، اختصار کے مدنظر ہم ان دو غیر مساوی قوسوں میں سے چھوٹی قوس کو ہی وہ **قوس** کہیں گے جو ان دو نقطوں کو ملاتی ہے۔

۵ ـــ تعریفات۔ کرہ کے کسی دائرہ کا **محور** کرہ کا وہ قطر ہے جو دائرہ کے مستوی پر عمود ہو، محور کے سرے دائرے کے **قطب*** کہلاتے ہیں۔ بڑے

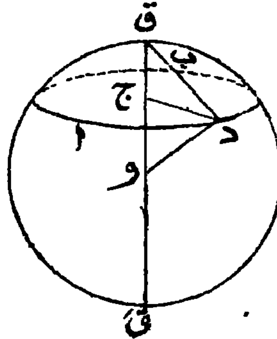
---

* جملہ "دائرہ کا قطب" کو ارشمیدس (۲۸۷ تا ۲۱۲ ق۔م) نے استعمال کیا تھا۔

دائرہ کے قطب، اس دائرہ کے مستوی سے مساوی فاصلے پر ہوتے ہیں۔ چھوٹے دائرہ کے قطب دائرہ کے مستوی سے مساوی فاصلے پر نہیں ہوتے، نزدیک کے قطب کو قریب تر (۳) اور دور کے قطب کو بعید تر قطب کہہ سکتے ہیں، بعض اوقات قریب تر قطب کو اختصاراً صرف قطب کہا جاتا ہے۔

۲ — دائرہ کا قطب اسکے محیط کے ہر نقطہ سے مساوی فاصلے پر ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ کرہ کا مرکز و، کرہ کا کوئی دائرہ ا ب، دائرہ کا مرکز ج اور دائرے کے قطب ق اور قَ ہیں۔ دائرہ کے محیط میں کوئی نقطہ د لو۔ ج د، و د، ق د کو ملاؤ۔ تب ق د = $\sqrt{ق ج^2 + ج د^2}$ اور چونکہ ق ج اور ج د مستقل ہیں، ق د مستقل ہے۔ فرض کرو کہ ایک بڑا دائرہ نقاط ق اور د میں سے گذرتا ہے۔ اب چونکہ وتر ق د مستقل ہے اسلئے دائرہ ا ب پر د کے تمام مقامات کے لئے ق اور د کے درمیان بڑے دائرے کی جو قوس قطع ہوتی ہے وہ مستقل ہے۔



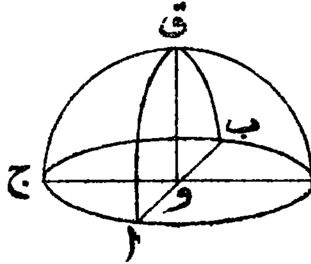
اس طرح دائرہ کے قطب کا فاصلہ اس کے محیط کے ہر نقطہ سے مستقل ہے، خواہ اس فاصلہ کو اس خط مستقیم کے ذریعہ ناپیں جو ان دو نقطوں کو ملاتا ہے یا بڑے دائرہ کی اس قوس کے ذریعہ جو ان نقطوں کے درمیان قطع ہوتی ہے۔

تعریف۔ چھوٹے دائرہ کا کروی نصف قطر قوس کا وہ طول ہے

جو چھوٹے دائرہ کے کسی نقطہ سے قریب تر قطب تک ایک بڑے دائرہ پر ناپا گیا ہو۔

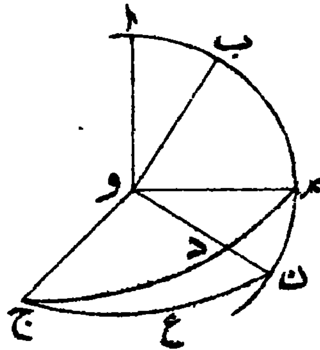
(۴) ۷ ـ بڑے دائرہ کی وہ قوس جو کسی بڑے دائرہ کے قطب سے اس کے محیط کے کسی نقطہ تک کھینچی جائے ایک ربع ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ بڑے دائرہ ا ب ج کا قطب ق ہے تو قوس ق ا ایک ربع ہوگی



فرض کرو کہ کرہ کا مرکز و ہے۔ ق و کو ملاؤ۔ اب ق و مستوی ا ب ج پر علی القوائم ہے کیونکہ ق ا ب ج کا قطب ہے۔ اس لئے زاویہ ق و ا زاویہ قائمہ ہے اور قوس ق ا ایک ربع ہے۔

۸ ـ دو بڑے دائروں کے قطبوں کو ملانیوالی بڑے دائرے کی قوس کے محاذی کرہ کے مرکز پر جو زاویہ بنتا ہے وہ بڑے دائروں کے مستویوں کے باہمی میلان کے مساوی ہوتا ہے۔



فرض کرو کہ کرہ کا مرکز و ہے۔ ج د، ج ع بڑے دائرے ہیں جو نقطہ ج پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اور ا ب اِن کے قطب ہیں۔

(۵) ا اور ب میں سے ایک بڑا دائرہ کھینچو جو ج د اور ج ع کو علی الترتیب م اور ن پر قطع کرے۔ اب ا و، و ج پر عمود ہے جو مستوی و ج د میں ایک خط مستقیم ہے؛ اور و ب، و ج پر عمود ہے جو مستوی و ج ع میں ایک خط مستقیم ہے؛ اس لئے و ج، مستوی ا و ب پر عمود ہے (اقلیدس جلد یازدہم مسئلہ ۴) اور اس لئے و ج خطوط مستقیم و م اور و ن پر عمود ہے جو مستوی ا و ب میں ہیں۔ پس مستویوں و ج د اور و ج ع کا زاویہ میلان زاویہ م و ن ہے۔ اور

د ا و ب = د ا و م - د ب و م

= د ب و ن - د ب و م

= د م و ن

۹ — **تعریف** — جب دو دائرے ایک دوسرے کو قطع کریں تو ان کے دو نقاط تقاطع میں سے کسی نقطہ پر کے مماسوں کے درمیانی زاویہ کو دائروں کا درمیانی زاویہ کہتے ہیں۔

دو بڑے دائروں کا درمیانی زاویہ انکے مستویوں کے باہمی میلان کے مساوی ہوتا ہے۔

دفعہ گذشتہ کی شکل میں نقطہ ج پر دائروں ج د اور ج ع کے مماس جو ان دائروں کے مستویوں میں واقع ہیں مشترک نصف قطر و ج پر عمود ہیں جو مستویوں کا خط تقاطع ہے۔ اس لئے مماسوں کا درمیانی زاویہ مستویوں کا زاویہ میلان ہے۔

دفعہ ۶ کی شکل میں چونکہ ق و، مستوی ا ج ب پر عمود ہے اسلئے ہر وہ مستوی جو ق و میں سے گذرتا ہے مستوی ا ج ب پر علی القوائم ہے۔

پس کسی دائرے کے مستوی اور اس کے قطبین میں سے گذرنے والے کسی بڑے دائرے کے مستوی کے درمیان جو زاویہ بنتا ہے وہ زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

۱۰ ۔ دو بڑے دائرے ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

چونکہ ہر بڑے دائرہ کا مستوی کرہ کے مرکز میں سے گذرتا ہے ان مستویوں کا خط تقاطع کرہ کا قطر ہے اور اس لئے ہر بڑے دائرہ کا بھی قطر ہے۔ اس لئے بڑے دائروں کی تنصیف اُن نقطوں پر ہوتی ہے جہاں یہ ایک دوسرے سے ملتے ہیں۔

۱۱ ۔ اگر کرہ کی سطح پر کے نقطہ ق کو بڑے دائرہ کی قوسوں کے ذریعہ کرہ پر کے دوسرے دو نقطوں ا اور ج سے ملایا جائے اور اگر ان میں سے ہر قوس ایک ربع ہو تو نقاط ا اور ج میں سے گذرنیوالے بڑے دائرہ کا قطب ق ہوگا بشرطیکہ ا اور ج ایک قطر کے سرے نہ ہوں۔ (دیکھو شکل دفعہ ۷) (۶)

فرض کرو کہ و کرہ کا مرکز ہے اور ق ا اور ق ج ربعات ہیں۔ اب چونکہ ق ا اور ق ج ربعات ہیں زاویے ق و ج اور ق و ا قائمہ زاویے ہیں۔ اس لئے ق و، مستوی ا و ج پر علی القوائم ہے اور ق بڑے دائرہ ا ج کا قطب ہے۔

۱۲ ۔ تعریف۔ وہ بڑے دائرے جو ایک بڑے دائرے کے قطبوں میں سے گذریں اس بڑے دائرہ کے **ثانوی** کہلاتے ہیں۔ مثلاً دفعہ ۸ کی شکل میں نقطہ ج، اب م ن کا قطب ہے اور اس لئے ج م اور ج ن، بڑے دائرے اب م ن کے ثانویوں کے حصے ہیں۔

ج م اور ج ن کا درمیانی زاویہ، م ن کے ذریعہ ناپا جاتا ہے یعنے

دو بڑے دائروں کا درمیانی زاویہ اُس قوس کے ذریعہ ناپا جاتا ہے جو یہ دائرے اُس بڑے دائرہ پر قطع کرتے ہیں جسکے یہ ثانوی ہیں۔

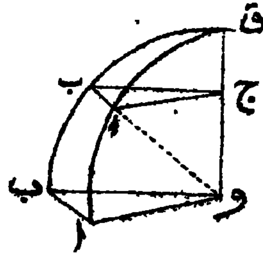
۱۳ — اگر کرہ کی سطح پر کے ایک نقطہ سے بڑے دائروں کی دو قوسیں جنکے مستوی ایک دئے ہوے دائرے کے مستوی پر علی القوائم ہوں کھینچی جا سکیں تو یہ نقطہ اس دئے ہوے دائرہ کا قطب ہوگا بشرطیکہ یہ کشیدہ قوسیں ایک ہی بڑے دائرے کے حصے نہ ہوں۔

چونکہ ان قوسوں کے مستوی دئے ہوے دائرہ کے مستوی پر علی القوائم ہیں انکا خط تقاطع دئے ہوئے دائرہ کے مستوی پر عمود ہے، اور اس لئے دئے ہو دائرہ کا محور ہے، پس وہ نقطہ جس سے یہ قوسیں کھینچی گئی ہیں دائرہ کا ایک قطب ہے۔

۱۴ — چھوٹے دائرہ کی قوس اور بڑے دائرہ کی قوس کا باہم مقابلہ کرنا جبکہ ان قوسوں کے محاذی انکے اپنے اپنے دائروں کے مرکزوں پر مساوی زاوئے بنیں۔

فرض کرو کہ اب چھوٹے دائرہ کی قوس ہے جس کا مرکز ج ہے اور قطب ق کرہ کا مرکز و ہے۔ ق میں سے بڑے دائرے ق ا ا اور ق ب ب کھینچو جو اُس بڑے دائرے کو جس کا قطب ق ہے علی الترتیب ا اور ب پر قطع کریں۔ ج ا، ج ب، و ا، و ب کو ملاؤ۔ اب ج ا، ج ب، و ا، و ب سب کے سب و ق پر عمود ہیں کیونکہ مستوی اج ب اور ا و ب، و ق پر عمود ہیں، اس لئے ج ا، و ا کے متوازی ہے اور ج ب، و ب کے متوازی ہے۔ اس لئے زاویہ اج ب = زاویہ ا و ب (۷)

(اقلیدس جلد یازدہم مسئلہ ۱۰)۔



پس

$$\frac{\text{قوس اب}}{\text{نصف قطر ج ا}} = \frac{\text{قوس اَب}}{\text{نصف قطر و ا}}$$ ، (مصنف کا علم مثلث مستوی دفعہ ۱۸)

اس لئے

$$\frac{\text{قوس اب}}{\text{قوس اَب}} = \frac{\text{ج ا}}{\text{و ا}} = \frac{\text{ج ا}}{\text{و ا}} = \text{جب ق و ا}$$



دوسرا باب (۸)

کروی مثلث

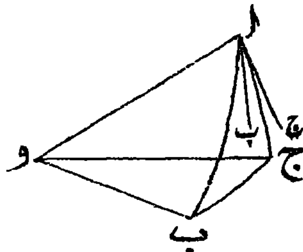
۱۵ — علم مثلث کروی میں اُن رشتوں کی تحقیق کیجاتی ہے جو مستوی رخوں کے زاویوں (جن سے ایک مجسم زاویہ بنتا ہے) اور اُن زاویوں کے درمیان ہوتے ہیں جو یہ مستوی رخ ایک دوسرے سے بناتے ہیں۔

۱۶ — کروی مثلث۔ فرض کرو کہ ایک مجسم زاویہ کا راس ایک کرہ کا مرکز بنایا گیا ہے، تب مجسم زاویہ کو بنانے والے مستوی کرہ کو بڑے دائروں کی قوسوں میں قطع کرینگے۔ اس طرح کرہ کی سطح پر ایک شکل بنے گی جسکو ہم **کروی مثلث** کہیں گے اگر یہ شکل بڑے دائروں کی تین قوسوں سے محدود ہو، یہ شکل اُس وقت پیدا ہوگی جبکہ مجسم زاویہ تین مستوی زاویوں کو ملانے سے بنا ہو۔ اگر مجسم زاویہ تین سے زیادہ مستوی زاویوں کے ملنے سے بنا ہے تو کرہ کی سطح پر متناظر شکل بڑے دائروں کی تین سے زیادہ قوسوں سے محدود ہوگی، اسکو ہم کرہ کی **کثیر ضلعی** کہینگے۔

۱۷ — تعریفات۔ جن تین قوسوں سے کروی مثلث بنتا ہے انکو اس کروی مثلث کے **ضلع** کہتے ہیں اور جو زاویے یہ قوسیں اپنے نقاط تقاطع پر ایک دوسرے سے بناتی ہیں ان کو کروی مثلث کے **زاویے** کہتے ہیں۔

۱۸ — مثلاً فرض کرو کہ کرہ کا مرکز ہ ہے اور ہ پر تین مستوی زاویوں کے ملنے سے

(۹) ایک مجسم زاویہ بنتا ہے۔ فرض کرو کہ مجسم زاویے کے مستوی کرہ کو بڑے دائروں کی قوسوں اب، ب ج، ج ا میں قطع کرتے ہیں، تب اب ج کروی مثلث ہے اور قوسیں اب، ب ج، ج ا اس کے ضلع ہیں۔ فرض کرو کہ ا پر قوس اب کا مماس ا ب ہے اور ا پر قوس اج کا مماس ا ج ہے، یہ مماس ا سے علی الترتیب ب اور ج کی جانب کھینچے گئے ہیں، تب زاویہ ب اج کروی مثلث کا ایک زاویہ ہے۔ اسی طرح ب اور ج پر اسی



طریقہ سے بنے ہوئے زاویے کروی مثلث کے دوسرے دو زاویے ہیں۔

۱۹ — علم مثلث کروی کی کسی کتاب کا خاص حصہ اُن مسائل کے لئے وقف ہوتا ہے جن کا تعلق کروی مثلث سے ہے؛ اس لئے کروی مثلث اور اس کے اجزاء کو صحیح طور پر سمجھ لینا ضروری ہے۔

یہ معلوم ہو چکا ہوگا کہ جنکو کروی مثلث کے ضلع کہا جاتا ہے وہ فی الواقعی بڑے دائروں کی قوسیں ہیں، اور یہ قوسیں اُن مستوی زاویوں کے متناسب ہیں جن سے وہ مجسم زاویہ بنتا ہے جو اس کروی مثلث کے متناظر ہے مثلاً پچھلے دفعہ کی شکل میں قوس اب کروی مثلث اب ج کا ایک ضلع ہے، اور مستوی زاویہ ا و ب کسر $\frac{\text{قوس اب}}{\text{نیم قطر و ا}}$ کے ذریعہ ناپا جاتا ہے؛

اس طرح قوس اب زاویہ ا و ب کے متناسب ہے جبتک کہ ایک ہی کرہ سے ان کا تعلق ہو۔

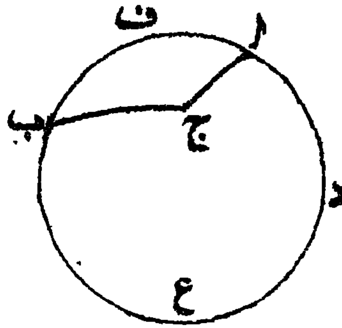
نیز دفعہ ۹ میں جو مسئلہ ثابت کیا گیا ہے اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

کروی مثلث کے زاویے وہی ہیں جو مستوی رخوں کے میلان ہیں جن سے مجسم بنتا ہے۔

۲۰ — ترقیم۔ حروف اُ، بُ، جُ بالعموم کروی مثلث کے زاویوں کو (۱۰)
تعبیر کرنے کے لئے استعمال کئے جاتے ہیں اور چھوٹے حروف ا، ب، ج ضلعوں کو تعبیر کرنے کے لئے۔ مستوی مثلثوں کی صورت میں جس طرح اُ، بُ، جُ زاویوں کی عددی قیمتوں کو تعبیر کرنے کے لئے استعمال کئے جاتے ہیں اسی طرح کروی مثلثوں میں بھی زاویوں کی عددی قیمتوں کو تعبیر کرنے کے لئے اُ، بُ، جُ استعمال کئے جا سکتے ہیں جبکہ یہ قیمتیں کسی اکائی کی رقوم میں بیان کی گئی ہوں بشرطیکہ ہم یہ اچھی طرح جان لیں کہ یہ اکائی کیا ہے۔ مثلاً اگر زاویہ ج زاویہ قائمہ ہو تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ جُ = ۹۰° یا یہ کہ جُ = $\frac{1}{2}\pi$؛ پہلی صورت میں ہم نے اکائی کے لئے ایک درجہ اختیار کیا ہے اور دوسری صورت میں وہ زاویہ جو ایک دائرہ کے مرکز پر اس کے نیم قطر کے مساوی قوس کے محاذی بنتا ہے۔ پھر چونکہ کروی مثلث کے ضلع ان زاویوں کے متناسب ہوتے ہیں جو کرہ کے مرکز پر ان ضلعوں کے محاذی بنتے ہیں اس لئے ان زاویوں کی عددی قیمتوں کو تعبیر کرنے کے لئے ا، ب، ج استعمال کئے جا سکتے ہیں جبکہ یہ قیمتیں کسی اکائی کی رقوم میں بیان کی گئی ہوں۔ ہم بالعموم یہ فرض کریں گے کہ کروی مثلث کے ضلع اور زاویے دائری ناپ میں بیان کئے گئے ہیں۔ (علم مثلث کروی از مصنف دفعہ ۲۰)۔

۲۱ — آئندہ کرہ کی سطح پر کھینچی ہوئی کوئی قوس بڑے دائرہ کی قوس متصور ہوگی سوائے اس صورت کے جبکہ اس کے خلاف صاف طور پر بیان کر دیا گیا ہو۔

۲۲ — ضلعوں کے طولوں پر مروجہ قید۔ کروی مثلثوں میں ہر ضلع نصف دائرہ سے کم لیا جاتا ہے، یہ فی الحقیقت ایک قرارداد ہے جس کو ہم نے اختیار کیا ہے کچھ تو اس وجہ سے کہ یہ بات روایتی ہے اور کچھ اس وجہ سے کہ مبتدی کو اس علم کے حاصل کرنے میں سہولت پیدا ہوتی ہے۔



مثلاً اوپر کی شکل میں قوس ا د ع ب نصف دائرہ سے بڑی ہے اور اگر ہم چاہیں تو ا د ع ب ج کو ایک کروی مثلث تصور کرسکتے ہیں جس کے اضلاع ا د ع ب، ا ج اور ب ج ہیں اور جس کے راس ا، ب، ج۔ لیکن ہم ایسے مثلثوں کو اپنی بحث سے خارج کرتے ہیں اور ا، ب، ج راس رکھنے والے مثلث سے وہ مثلث مراد لیتے ہیں جو ضلعوں ا ف ب، ب ج اور ج ا سے بنا ہے۔

۲۳ — پہلی دفعہ کی قید سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کروی مثلث کا ہر زاویہ دو قائمہ زاویوں سے کم ہوتا ہے۔

کیونکہ فرض کرو کہ ضلعوں ب ج، ج ا اور ب ع د ا سے بنے ہوئے مثلث میں زاویہ ب ج ا دو قائمہ زاویوں سے بڑا ہے۔ تب قوس ب ع د ا کے وہ حصے جو علی الترتیب ب اور ا کے عین قریب ہیں صریحاً بڑے دائرے ب ج کے مستوی کے متقابل جوانب واقع ہوتے ہیں۔ پس یہ قوس اس مستوی کو قطع کرنی چاہیئے! فرض کرو کہ قوس، مستوی کو نقطہ د پر قطع کرتی ہے! تب د قوس ب ج ممدودہ پر واقع ہے۔ اب دفعہ ۱۰ کی رو سے ب ع د نصف دائرہ ہے اور اس لئے ب ع ا نصف دائرہ سے بڑا ہے۔ پس مفروضہ مثلث ہماری بحث سے خارج ہے۔

۲۴ — کروی مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان جو رشتے علم مثلث کروی کی

کتابوں میں معلوم کئے جاتے ہیں وہ عام طور پر ضلعوں اور زاویوں کے مثلثی تفاعلوں پر مشتمل ہوتے ہیں۔ ان رشتوں کو معلوم کرنے سے پیشتر ہم چند ایسے مسئلوں پر غور کریں گے جو خود ضلعوں اور زاویوں پر مشتمل ہیں اور جن میں انکی مثلثی نسبتیں داخل نہیں ہوتیں۔

تعریفات ۔ ذیل کی تعریفیں اہم ہیں۔

پھانک ۔ کرہ کی سطح کا وہ حصہ ہے جو دو بڑے نصف دائروں سے محدود ہوتا ہے

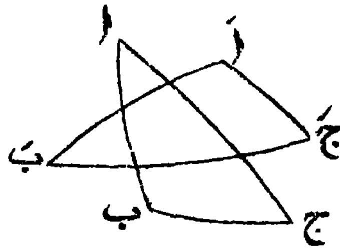
(۱۲) دو مثلثوں ا ب ج ' اَ ب ج کو جنمیں ضلع ب ج مشترک ہے اور دوسرے اضلاع ایک ہی بڑے دائروں سے متعلق ہیں ہم **پھانکی مثلث** کہتے ہیں کیونکہ یہ دونوں مثلث باہم ملکر ایک پھانک بناتے ہیں۔ دوسرے مثلث میں اَ وہ نقطہ ہے جو کرہ پر ا سے متقاطر ہے۔ اگر ا ' ب ' ج کے متقاطر نقطے علی الترتیب اَ ' بَ ' جَ ہوں تو مثلث ا ب ج کے ہم پھانکی مثلث تین ہونگے یعنی اَ ب ج ' بَ ا ج ' اور جَ ا ب۔

تحت قدمی مثلث وہ مثلث ہیں جن میں ایک مثلث کے راس دوسرے مثلث کے تناظر راسوں کے متقاطر ہوتے ہیں جیسے مثلث ا ب ج اور مثلث اَ بَ جَ۔

۲۵ ۔ قطبی مثلث[1] ۔ فرض کرو کہ ا ب ج کوئی کروی مثلث ہے اور فرض کرو کہ نقاط اَ ' بَ ' جَ علی الترتیب قوسوں ب ج ' ج ا ' ا ب کے وہ قطب ہیں جو اپنی اپنی قوسوں کے مقابل زاویوں ا ' ب ' ج کی جانب واقع ہیں۔ تب مثلث اَ بَ جَ کو مثلث ا ب ج کا **قطبی مثلث** کہتے ہیں۔

---

[1] قطبی مثلث کو Snellius نے دریافت کیا' اور اس کے فائدے اپنی کتاب (علم مثلث) Trigonometria (Lib. III, prop. VIII. میں درج کئے جو لیڈن میں ۱۶۲۷ء میں طبع ہو کر شائع ہوی۔

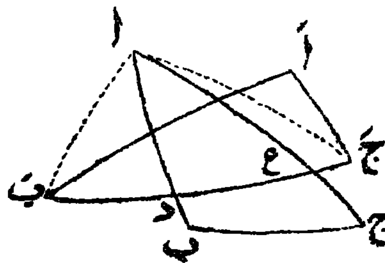


چونکہ کروی مثلث کے ہر ضلع کے دو قطب ہوتے ہیں اس لئے آٹھ مثلث بنائے جاسکتے ہیں جن کے راس دئے ہوئے کروی مثلث کے ضلعوں کے قطب ہوں، لیکن صرف ایک مثلث ہے جس میں یہ قطب اَ، بَ، جَ اس جانب واقع ہوتے ہیں جبکی تعیین متناظر زاویوں ا، ب، ج کے لحاظ سے اوپر کیگئی ہے۔ یہی وہ مثلث ہے جو قطبی مثلث کے نام سے معروف ہے۔ (۱۴)

ہم مثلث ا ب ج کو مثلث اَ بَ جَ کے لحاظ سے ابتدائی مثلث کہیں گے۔

۲۶ — اگر ایک مثلث دوسرے کا قطبی مثلث ہو تو یہ دوسرا مثلث پہلے کا قطبی مثلث ہوگا۔

فرض کرو کہ ا ب ج کوئی مثلث ہے اور اس کا قطبی مثلث اَ بَ جَ ہے؛ تو ثابت کرنا ہے کہ Δ ا ب ج، Δ اَ بَ جَ کا قطبی مثلث ہے۔



چونکہ بَ، ا ج کا قطب ہے توس ا بَ ایک ربع ہے، اور چونکہ

جَ ' ب ا کا قطب ہے قوس ا جَ ایک ربع ہے (دفعہ ۷)؛ اس لئے دَ بَ جَ کا قطب اَ ہے (دفعہ ۱۱)۔ نیز ا اور اَ ' بَ جَ کے ایک ہی جانب واقع ہیں کیونکہ بموجب فرض ا اور اَ ' ب ج کے ایک ہی جانب واقع ہیں اور اس لئے ا اَ ایک ربع سے کم ہے۔ اور چونکہ اَ ' بَ جَ کا قطب ہے اور ا اَ ربع سے کم ہے اس لئے ا اور اَ ' بَ جَ کے ایک ہی جانب واقع ہیں۔

اسی طرح یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ بَ ' جَ اَ کا قطب ہے اور ب اور بَ ' جَ اَ کے ایک ہی جانب واقع ہیں؛ نیز ج ' اَ بَ کا قطب ہے اور ج اور جَ ' اَ بَ کے ایک ہی جانب واقع ہیں۔ پس ا ب ج ' مثلث اَ بَ جَ کا قطبی مثلث ہے۔

۲۷۔ قطبی مثلث کے ضلع اور زاوئے علی الترتیب ابتدائی مثلث کے زاویوں اور ضلعوں کے تکملہ ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ قوس دَ بَ جَ ' ممدودہ بشرط ضرورت ' قوس ا ب اور قوس ا ج کو علی الترتیب نقاط د اور ع پر قطع کرتی ہے۔ تب چونکہ ا ' بَ جَ کا قطب ہے کروی زاویہ ا ' قوس د ع کے ذریعہ ناپا جاتا ہے (دفعہ ۱۲) لیکن بَ ع اور جَ د میں سے ہر قوس ایک ربع ہے؛ اس لئے د ع اور بَ جَ مل کر نصف دائرہ کے مساوی ہیں؛ یعنے کرہ کے مرکز پر بَ جَ کے محاذی جو (۱۴)
زاویہ بنتا ہے وہ زاویہ ا کا تکملہ ہے۔ اس کو ہم اختصاراً اس طرح بیان کرتے ہیں کہ بَ جَ ' ا کا تکملہ ہے۔ اسی طرح یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ جَ اَ ' ب کا تکملہ ہے اور اَ بَ ' ج کا تکملہ۔

پھر چونکہ ا ب ج ' اَ بَ جَ کا قطبی مثلث ہے' یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ب ج ' ج ا ' ا ب علی الترتیب اَ ' بَ ' جَ کے تکملہ ہیں یعنے اَ ' بَ ' جَ علی الترتیب ب ج ' ج ا ' ا ب کے تکملہ ہیں۔

اِن خواص کی بناء پر ابتدائی مثلث اور اس کے قطبی مثلث کو بعض اوقات **تکمیلی مثلث** کہتے ہیں۔

مثلاً اگر ا' ب' ج' ا' ب' ج سے ایک کروی مثلث کے زاویے اور ضلع تعبیر ہوں جبکہ انھیں دائری ناپ میں بیان کیا جائے اور اسی طرح اسکے قطبی مثلث کے زاویے اور ضلع ا' ب' ج' ا' ب' ج سے تعبیر ہوں تو

ا' = π - ا، ب' = π - ب، ج' = π - ج،

ا' = π - ا، ب' = π - ب، ج' = π - ج

۲۸ ـ کروی مثلث سے متعلق مسئلوں کی ثنویت ـ

پچھلے دفعہ کا نتیجہ بہت اہم ہے، کیونکہ اگر کسی کروی مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے لحاظ سے کوئی عام مسئلہ ثابت ہو جائے تو یہ مسئلہ اسکے قطبی مثلث پر بھی صادق آئے گا۔ اس طرح کوئی ایسا مسئلہ درست رہیگا اگر زاویوں کو متناظر اضلاع کے تکملوں میں اور ضلعوں کو متناظر زاویوں کے تکملوں میں تبدیل کیا جائے۔ آئندہ باب میں اس اصول کی مختلف مثالیں ہماری نظر سے گذریں گی۔

۲۹ ـ کروی مثلث کے کسی دو ضلعوں کا مجموعہ تیسرے ضلع سے بڑا ہوتا ہے۔ (دیکھو شکل دفعہ ۱۸)

کروی مثلث کے جواب میں کرہ کے مرکز و پر مجسم زاویہ بناؤ۔ اب اس مجسم زاویہ کے تین مستوی زاویوں میں سے کسی دو کا مجموعہ تیسرے سے بڑا ہوتا ہے (اقلیدس جلد یازدہم مسئلہ ۲۰) اس لئے قوسوں ب ج، ج ا، ا ب میں سے کسی دو کا مجموعہ تیسرے سے بڑا ہے۔

اس مسئلہ سے یہ بات واضح ہے کہ کروی مثلث کا کوئی ضلع دوسرے دو ضلعوں کے فرق سے بڑا ہوتا ہے۔

(۱۵) ۳۰ ـ کروی مثلث کے تینوں ضلعوں کا مجموعہ بڑے دائرہ کے

محیط سے کم ہوتا ہے۔ (دیکھو شکل دفعہ ۱۸)

کیونکہ کرہ کے مرکز و پر جو مجسم زاویہ بنتا ہے اس کے تین مستوی زاویوں کا مجموعہ چار قائمہ سے کم ہے (اقلیدس جلد یازدہم مسئلہ ۲۱)

اس لئے $\frac{\text{ب ج}}{\text{و ا}} + \frac{\text{ج ا}}{\text{و ا}} + \frac{\text{ا ب}}{\text{و ا}} < ۲\pi$

اس لئے ب ج + ج ا + ا ب $<$ ۲π × و ا

یعنی قوسوں کا مجموعہ بڑے دائرہ کے محیط سے کم ہے۔

۳۱ — پچھلے دو دفعات میں جن مسئلوں کو ثابت کیا گیا ہے اون کی توسیع ہو سکتی ہے۔ مثلاً اگر ایک کثیر الاضلاع ہو جس کا ہر زاویہ دو قائمہ سے کم ہے تو اسکا کوئی ایک ضلع باقی سب ضلعوں کے مجموعہ سے کم ہوگا۔

اس کو دفعہ ۲۹ کے ثبوت کی تکرار سے ثابت کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً فرض کرو کہ کثیر الاضلاع چار ضلعوں پر مشتمل ہے اور اس کے راس ا، ب، ج، د سے تعبیر ہوتے ہیں تو

ا ب + ب ج بڑا ہے ا ج سے

اسلئے ا ب + ب ج + ج د بڑا ہے ا ج + ج د سے

اور اسلئے انکا مجموعہ بالاولیٰ ا د سے بڑا ہے۔

نیز اگر کسی کثیر الاضلاع میں ہر زاویہ دو قائمہ سے کم ہو تو اس کے اضلاع کا مجموعہ بڑے دائرہ کے محیط سے کم ہوگا۔ یہ مسئلہ (اقلیدس جلد یازدہم مسئلہ ۲۱) دفعہ ۳۰ کے طریقہ پر ثابت ہو سکتا ہے۔

۳۲ — کروی مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ دو قائمہ زاویوں سے بڑا اور چھ قائمہ زاویوں سے چھوٹا ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ا، ب، ج کروی مثلث کے زاویے ہیں اور اَ، بَ، جَ

قطبی مثلث کے ضلع ہیں تو دفعہ (۳۰) سے

$$\bar{ا} + \bar{ب} + \bar{ج} < ۲\pi ،$$

یعنی $\pi - ا + \pi - ب + \pi - ج < ۲\pi$ ،

اس لئے $ا + ب + ج > \pi$

نیز چونکہ ا، ب، ج میں سے ہر زاویہ π سے کم ہے اس لئے ان کا مجموعہ ۳π سے کم ہے۔

(۱۲) **۳۳۔ مثلثوں کا متشاکلاً اور متماثلاً مساوی ہونا۔** اگر ا ب ج اور $\bar{ا}\bar{ب}\bar{ج}$ تحت قدمی (Antipodal) مثلث ہوں تو قوس ب ج کا مستوی وہی ہے جو قوس $\bar{ب}\bar{ج}$ کا ہے، اور اسی طرح ج ا، $\bar{ج}\bar{ا}$ اور ا ب، $\bar{ا}\bar{ب}$ کے لئے یہ بات درست ہے۔ اس لئے ایک مثلث کے زاوئے علی الترتیب دوسرے مثلث کے زاویوں کے مساوی ہیں، اور چونکہ کسی دو نقطوں کا درمیانی فاصلہ، ان کے متقاطر نقطوں کے درمیانی فاصلہ کے مساوی ہوتا ہے اس لئے ایک مثلث کے ضلع دوسرے مثلث کے متناظر ضلعوں کے مساوی ہیں۔ اس طرح اِن مثلثوں کے تمام متناظر عناصر ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔

تاہم ان دو مثلثوں میں یہ فرق ہے کہ اگر ہم مثلثوں کے ضلعوں پر اس طریقہ سے چلیں کہ متناظر عناصر ایک ہی ترتیب میں آئیں تو ہمیں ایک مثلث کی صورت میں موافق سمت ساعت چلنا ہوگا اور دوسرے مثلث کی صورت میں مخالف سمت ساعت۔ اس لئے اگر مثلث $\bar{ا}\bar{ب}\bar{ج}$ کو کرہ کی سطح میں ہٹایا جائے تاآنکہ $\bar{ب}$، ب پر اور $\bar{ج}$، ج پر منطبق ہو جائیں تو باقی راس $\bar{ا}$، ا ایک دوسرے پر منطبق نہیں ہونگے بلکہ مشترک قوس ب ج کی مقابل جانبوں میں واقع ہونگے۔ اس لئے یہ مثلث انطباق پذیر نہیں ہیں۔ لیکن اگر مثلث $\bar{ا}\bar{ب}\bar{ج}$ کو مادی جھلی تصور کر کے اسکو کرہ کی سطح پر سے اٹھا لیا جائے اور اسکی محدب سطح کو دبا کر مقعر کر دیا جائے تو یہ تبدیل شدہ مثلث ا ب ج پر

ٹھیک ٹھیک منطبق ہو سکے گا۔
اس طرح تحت قدمی مثلث ہر لحاظ سے ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں لیکن انطباق پذیر نہیں ہوتے۔ جن مثلثوں میں اس قسم کی مساویت ہوتی ہے اِن کو ہم متشاکلاً[1] مساوی کہینگے، اور جو مثلث ایک دوسرے پر منطبق ہو سکتے ہوں اِنکو متماثلاً مساوی۔

۳۴۔ جس طرح مستوی مثلثوں کو ایک دوسرے کے مساوی ثابت کرنے میں انطباق (Superposition) کا طریقہ بعض حالات کے تحت کام میں لایا جاتا ہے (مثلاً اقلیدس کے مسئلہ ۱، ۴، ۸ اور ۲۶ میں) اسی طرح اِسے ایک ہی کرہ پر کے کروی مثلثوں پر بھی استعمال کیا جا سکتا ہے، ساویت کی شرط یہ ہے کہ ایک (۱۷) مثلث دوسرے پر یا اس کے تحت قدمی مثلث پر منطبق ہو سکے۔ اس طریقہ سے مسئلہ ذیل کی پہلی تین صورتیں ثابت ہو سکتی ہیں:-

ایک ہی کرہ پر کے دو مثلث متماثلاً یا متشاکلاً مساوی ہوتے ہیں اور اس لئے اِن کے تمام متناظر عناصر ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں

(۱) اگر ایک مثلث کے دو ضلع اور اِنکا درمیانی زاویہ علی الترتیب دوسرے مثلث کے دو ضلعوں اور اِنکے درمیانی زاویہ کے مساوی ہوں،

(۲) اگر ایک مثلث کے تینوں ضلع علی الترتیب دوسرے مثلث کے تینوں ضلعوں کے مساوی ہوں،

---

[1] اصطلاح "متشاکلاً" (Symmetrical) لیجنڈر سے منسوب کیجاتی ہے۔ دیکھو Geomtrie, vi, Def. 16

(۳) اگر ایک مثلث کے دو زاوئے اور واصل ضلع علی الترتیب دوسرے مثلث کے دو زاویوں اور واصل ضلع کے مساوی ہوں،

(۴) اگر ایک مثلث کے تینوں زاوئے علی الترتیب دوسرے مثلث کے تینوں زاویوں کے مساوی ہوں۔

مستوی ہندسہ میں صورت (۴) کے مماثل کوئی صورت نہیں ہے، اسکو تکمیلی مثلثوں کے ذریعہ صورت (۳) سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔

۳۵۔ متساوی الساقین کروی مثلث کے قاعدہ پر کے زاوئے مساوی ہوتے ہیں۔

کیونکہ اگر ضلع اب، اج مساوی ہوں اور اگر ضلع ب ج کا وسطی نقطہ د ہو تو مثلث ادب، ادج کے متناظر ضلع ایک دوسرے کے مساوی ہیں اور اس لئے مثلث ادب، ادج متشاکلاً مساوی ہیں۔ اسلئے زاوئے ب اور ج مساوی ہیں۔

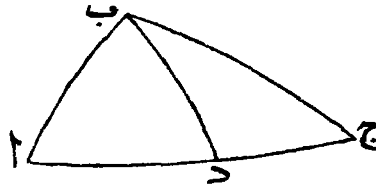
اگر اب اور اج ربعات ہوں تو دفعات ۱۱ اور ۹ کی رو سے قاعدہ پر کے زاوئے قائمہ ہونگے۔

۳۶۔ اگر کروی مثلث کے دو زاوئے مساوی ہوں تو انکے مقابل کے ضلع مساوی ہوتے ہیں۔

چونکہ ابتدائی مثلث کے دو زاوئے مساوی ہیں، اس کے قطبی مثلث کے دو ضلع مساوی ہیں؛ اس لئے قطبی مثلث میں مساوی ضلعوں کے مقابل کے زاوئے مساوی ہیں (دفعہ ۳۵)، پس ابتدائی مثلث میں مساوی زاویوں کے مقابل کے ضلع مساوی ہیں۔

(۱۸) ۳۷۔ اگر کروی مثلث کا ایک زاویہ دوسرے سے بڑا ہو تو بڑے

زاوئے کے سامنے کا ضلع چھوٹے زاوئے کے سامنے کے ضلع سے بڑا ہوتا ہے۔



فرض کرو کہ ا ب ج کروی مثلث ہے جس میں زاویہ ا ب ج، زاویہ ب ا ج سے بڑا ہے تو ضلع ا ج، ضلع ب ج سے بڑا ہوگا۔

ب پر زاویہ ب ا د کے مساوی زاویہ ا ب د بناؤ تو ب د = ا د (دفعہ ۳۶) اور ب د + د ج، ب ج سے بڑا ہے (دفعہ ۲۹) اس لئے ا د + د ج، ب ج سے بڑا ہے یعنی ا ج، ب ج سے بڑا ہے۔

۳۸ — اگر کروی مثلث کا ایک ضلع دوسرے سے بڑا ہو تو بڑے ضلع کے سامنے کا زاویہ چھوٹے ضلع کے سامنے کے زاوئے سے بڑا ہوتا ہے۔

اس کو قطبی مثلث کے ذریعہ پچھلے دفعہ سے ثابت کر سکتے ہیں، یا اسکو طریقہ ذیل پر بھی ثابت کیا جا سکتا ہے:۔

فرض کرو کہ ضلع ا ج، ضلع ب ج سے بڑا ہے تو ثابت کرنا ہے کہ زاویہ ا ب ج، زاویہ ب ا ج سے بڑا ہے۔ زاویہ ا ب ج، زاویہ ب ا ج سے چھوٹا ہو نہیں سکتا (دفعہ ۳۷) اور اس کے مساوی بھی ہو نہیں سکتا (دفعہ ۳۶)، اس لئے زاویہ ا ب ج، زاویہ ب ا ج سے بڑا ہونا چاہئے۔

اس باب کی توسیع ہو سکتی تھی لیکن یہ غیر ضروری ہے، کیونکہ باب آئندہ میں جو مثلثی ضابطے دئے جائیں گے انکی مدد سے علم مثلث کروی کے مسائل

آسانی کے ساتھ حل ہو سکتے ہیں، مثلاً دیکھو دفعات ۶۷ اور ۶۸۔

۳۹ ۔ نوٹ :۔ علم مثلث کروی کی بنیاد ہیپارکس (Hipparchus) (سنہ ۱۵۰ ق ۔ م) نامی ہیئت داں سے منسوب کیجاتی ہے۔ اس علم کے اساسی مسائل
(۱۹) منیلاس (Menelaus) کی Sphaerica اور ٹولمی کی Almagest میں ملتے ہیں۔ بعد میں ان مسائل کو علماء عرب نے اور پندرھویں صدی کے وسط میں Regiomontanus نے وسعت دی تاکہ علم ہیئت میں ان سے استفادہ کیا جا سکے۔

زمانہ جدید میں یولر کے مقالوں سے اس علم کے مطالعہ کا شوق تازہ ہو گیا اسکا پہلا مقالہ Memoires de l'Academie Royale de Berlin سنہ ۱۷۵۳ء میں طبع ہوا اور چند سال بعد اس علم پر مسلسل مضامین رسالہ Acta Petropolitana میں شائع ہوئے، ان میں سے اہم ترین مضامین کے عنوانات حسب ذیل ہیں :۔

De Mensura Angulorum Solidorum (سنہ ۱۷۸۱ء صفحہ ۳۱)، اور
Trigonometria Sphaerica Universa ex primis principiis derivata (سنہ ۱۷۷۹ء صفحہ ۹)،

لگرانج نے چند سال بعد کروی مثلثوں کے ضابطوں کی تحقیق Journal de l'École Polytechnique سنہ ۱۷۹۹ء باب ششم صفحہ ۲۷۰ میں کی ہے۔
ان علماء کے علاوہ جن ہندسوں نے علم ہندسہ کروی میں اضافہ کیا ہے ان کے اسمائے گرامی حسب ذیل ہیں
Vieta (1593), Napier (1614), Snellius (1626), Girard (1629)
Lexell (1782), Legendre (1787), Charles (1831), Schulz (1833),
Gudermann (1835), and Borguet (1847)

بالعموم یہ امر موبیس (Möbius) سے منسوب کیا جاتا ہے (دیکھو
"Entwickelungen der Grundformeln der Sphärischen Trigonometrie in grosstmöglicher Allgemeinheit" Verhandlungen der kön säch. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 1860, p. 51)
کہ اس نے معیاری ضابطوں کی توسیع ایسے مثلثوں پر کی جنکے ضلعوں پر ۱۸۰° سے کم ہونیکی قید نہیں ہے۔ لیکن گاس (Gauss) نے اپنی Theoria Motus Corporum Coelestium (1809) میں جو کچھ لکھا ہے اس سے اس بات کا پتہ چلتا ہے کہ اسکو بھی اس قسم کی تعمیم کا خیال

آیا تھا اور اس نے اس کا حل بھی دریافت کیا تھا لیکن اس کو شائع نہیں کیا۔ پروفیسر Chauvenet اپنی تصنیف Astronomy کے دیباچہ میں تحریر کرتے ہیں کہ انہوں نے اپنی Treatise on Trig (سنہ ۱۸۵۰ء) میں عام مثلث کے لئے معیاری ضابطوں کو ثابت کیا ہے، لیکن یہ کتاب بمشکل دستیاب ہو سکتی ہے اور اب طبع نہیں ہوتی۔ بہر کیف موبیس کا پہلا مقالہ جو اس مضمون پر ہے سنہ ۱۸۴۶ء میں شائع ہوا (دیکھو دفعہ ۳۰۲)۔ ہم مثلث کی تعمیم پر انیسویں باب میں بحث کرینگے۔

---

(۲۰)

تیسرا باب

کروی مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے مثلثی تفاعلوں کے درمیان رشتے

۴۰ ـ کروی مثلث کے عناصر ـ کروی مثلث میں چھ عنصر ہوتے ہیں یعنے تین ضلع ا، ب، ج اور تین زاویہ ا، ب، ج ـ جب ان چھ عناصر میں سے کوئی تین دئے جائیں تو مثلث کی شکل اور اس کے ابعاد کی پوری طرح تعیین ہوتی ہے کیونکہ ایسے رشتے موجود ہیں جنکے ذریعہ دوسرے تین عناصر معلوم کئے جاسکتے ہیں ـ اس باب میں ان رشتوں کی تحقیق کیجائے گی ـ

ان رشتوں کو دو گروہوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے ـ فصل اول میں ہم ان ضابطوں پر غور کرینگے جنمیں مثلث کے چار عناصر شامل ہوتے ہیں اور فصل دوم میں ان ضابطوں پر جنمیں پانچ یا چھ عناصر شامل ہوتے ہیں ـ

فصل اول

۴۱ ـ چار عناصر پر مشتمل ضابطے ـ شامل ہونے والے عنصروں کا لحاظ کرتے چار صورتیں پیدا ہوتی ہیں :ـ

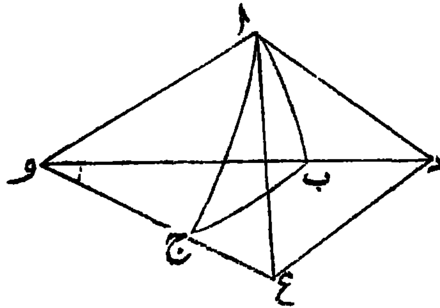
۱ ـ تین ضلع اور ایک زاویہ ،

۲ ـ دو ضلع اور انکے مقابل کے زاوئے ،

۳ ــ دو ضلع، انکا درمیانی زاویہ اور ایک دوسرا زاویہ،
۴ ــ تین زاوئیے اور ایک ضلع -

صورت اول ـ تین ضلع اور ایک زاویہ (۲۱)

۴۲ ـ مثلث کے کسی زاویے کی جیب التمام کو ضلعوں کی جیوب اور جیوب التمام کی رقوم میں بیان کرنا -



فرض کرو کہ اب ج کروی مثلث ہے اور و کرہ کا مرکز ہے - فرض کرو کہ قوس اج کے نقطہ ا پر اس کا مماس اع، وج ممدودہ سے نقطہ ع پر ملتا ہے اور قوس اب کے نقطہ ا پر اس کا مماس اد، وب ممدودہ سے نقطہ د پر ملتا ہے - ع د کو ملاؤ - زاویہ ع اد کروی مثلث کا زاویہ ا ہے اور زاویہ ع و د سے ضلع ا کی پیمائش ہوتی ہے -

مثلثات اد ع اور و د ع سے

د ع^2 = اد^2 + اع^2 − ۲ اد × اع جم ا

د ع^2 = و د^2 + وع^2 − ۲ و د × وع جم ا

نیز زاوئیے و ا د اور و ا ع قائمہ زاوئیے ہیں اسلئے و د^2 = وا^2 + اد^2

اور وع^2 = وا^2 + اع^2 - پس عمل تفریق سے

۰ = ۲ و ا ۲ + ا د × ا ع جم ا - ۲ و د × و ع جم ا

اس لئے جم ا = و ا/و ع × و ا/و د + ا ع/و ع × ا د/و د جم ا

یعنے جم ا = جم ب جم ج + جب ب جب ج جم ا ......(۱)

اسلئے جم ا = (جم ا - جم ب جم ج)/(جب ب جب ج) ....(۲)

(۲۲) ۴۳ — پچھلے دفعہ کے عمل میں ہم نے یہ فرض کرلیا ہے کہ زاویہ ا جن ضلعوں کے درمیان ہے انمیں سے ہر ایک ربع سے کم ہے کیونکہ ہم نے یہ مان لیا ہے کہ ا پر کے مماس و ب اور و ج کو خارج کرنے پر انہیں قطع کرتے ہیں - اب ہمیں یہ ثابت کرنا چاہیئے کہ ضابطہ بالا اسوقت بھی درست رہتا ہے جبکہ یہ ضلع ربعات سے کم نہ ہوں - مختلف صورتیں پیدا ہوتی ہیں کیونکہ ان میں سے ایک ضلع یا ہر ضلع ربع سے بڑا یا ربع کے مساوی ہو سکتا ہے - ہم ہر صورت پر علٰحدہ علٰحدہ غور کرینگے -

(۱) فرض کرو کہ زاویہ ا جن ضلعوں کے درمیان ہے انمیں سے صرف ایک ضلع ربع سے بڑا ہے مثلاً ضلع ا ب - ب ا اور ب ج کو خارج کرو کہ وہ نقطۂ بَ پر ملیں اور فرض کرو کہ ا بَ = جَ ' ج بَ = اَ

اب مثلث ا بَ ج میں دفعہ ۴۲ (۱) کی رو سے

جم اَ = جم ب جم جَ + جب ب جب جَ جم بَ ا ج

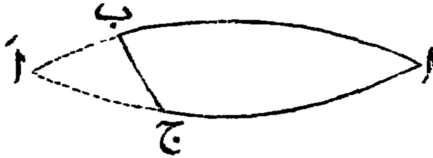
لیکن اَ = π - اُ، جَ = π - ج، بَ ا ج = π - ا

اسلئے جم ا = جم ب جم ج + جب ب جب ج جم ا

(۲) فرض کرو کہ زاویہ ا جن ضلعوں کے درمیان ہے انمیں سے ہر ضلع

رُبع سے بڑا ہے۔ اب اور اج کو خارج کرو کہ وہ نقطہ اَ پر ملیں۔ رکھو اَب = جَ
اَج = بَ تو مثلث اَب ج سے حسب سابق

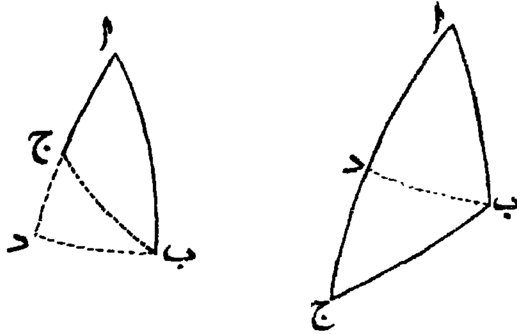
جم ا = جب بَ جم جَ + جب بَ جب جَ جم اَ



لیکن بَ = π - ب، جَ = π - ج، اَ = ا

اسلئے جم ا = جم ب جم ج + جب ب جب ج جم ا

(۴) فرض کرو کہ زاویہ ا جن ضلعوں کے درمیان ہے انمیں سے صرف (۲۴)
ایک ضلع ربع کے مساوی ہے مثلاً ضلع اب۔ اج پر، ممدودہ لبشرط ضرورت،
اد ربع کے مساوی قطع کرو اور ب د کو ملاؤ۔ اگر ب د ربع کے مساوی ہو تو ب،



اج کا قطب ہے (دفعہ ۱۱)۔ اس صورت میں ا = ½ π، اور ا = ½ π، اور
ج = ½ π، پس ضابطۂ بالا جسکی تصدیق ہم چاہتے ہیں متماثلہ ۰ = ۰ میں تحویل ہو جاتا
ہے۔ لیکن اگر ب د ربع کے مساوی نہ ہو تو مثلث ب د ج سے

جم ا = جم ج د جم ب د + جب ج د جب ب د جم ج د ب

لیکن جم ج د ب = ۰، جم ج د = جم ($\frac{1}{2}\pi$ − ب) = جب ب،
اور جم ب د = جم ا
اسلئے جم ا = جب ب جم ا
اور یہ وہ صورت ہے جو دفعہ ۴۲ کے ضابطے میں ج = $\frac{1}{2}\pi$ درج کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

(۴) فرض کرو کہ زاویہ ا جن ضلعوں کے درمیان ہے ان میں سے ہر ایک ربع ہے۔ ضابطہ اس صورت میں جم ا = جم ا ہو جاتا ہے جو صریحاً درست ہے کیونکہ اب ب ج کا قطب ا ہے اور اس لئے ا = ا۔

اس طرح دفعہ ۴۲ کے ضابطہ کی صداقت ہر صورت کیلئے ثابت ہو گئی۔

۴۴ — دفعہ ۴۲ کا ضابطہ مثلث کے کسی زاویہ کی جیب التمام کو ضلعوں کی جیوب اور جیوب التمام کی رقوم میں بیان کرنے کے لئے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ اسطرح ہمیں حسب ذیل تین ضابطے ملتے ہیں:- (۲۴)

جم ا = جم ب جم ج + جب ب جب ج جم ا
جم ب = جم ج جم ا + جب ج جب ا جم ب　　......(۲) [له]
جم ج = جم ا جم ب + جب ا جب ب جم ج

ان ضابطوں کو علم مثلث کروی میں بنیادی مساواتیں قرار دیا جا سکتا ہے۔ انکی مدد سے ہم متعدد ضابطے اخذ کرینگے۔

۴۵ — کروی مثلث کے کسی زاوئے کی جیب کو ضلعوں کے مثلثی تفاعلوں کی رقوم میں بیان کرنا۔

له Aibategnius نے ان ضابطوں کا انکشاف کیا تھا اور اس نے انکے متعدد اطلاقات عمل میں لائے۔ یولر نے انکا ثبوت دیا Memoires de Berlin, 1753 کروی مثلث کے تمام ضابطے ان ضابطوں کی مدد سے حاصل ہو سکتے ہیں جیسا کہ لگرانج نے ثابت کیا ہے۔ گاس نے بھی Schumacher کے Carnot's Géométrie de Position کے ترجمہ کے ضمیمہ میں دیگر ضابطوں کو ان ضابطوں سے اخذ کیا ہے (Gauss, Ges. Werke, Vol, V, p. 401.)

چونکہ $\text{جم ا} = \dfrac{\text{جم ا} - \text{جم ب جم ج}}{\text{جب ب جب ج}}$

اسلئے $\text{جب}^2\,\text{ا} = 1 - \left(\dfrac{\text{جم ا} - \text{جم ب جم ج}}{\text{جب ب جب ج}}\right)^2$

$= \dfrac{(1-\text{جم}^2\,\text{ب})(1-\text{جم}^2\,\text{ج}) - (\text{جم ا} - \text{جم ب جم ج})^2}{\text{جب}^2\,\text{ب جب}^2\,\text{ج}}$

$= \dfrac{1-\text{جم}^2\,\text{ا} - \text{جم}^2\,\text{ب} - \text{جم}^2\,\text{ج} + 2\,\text{جم ا جم ب جم ج}}{\text{جب}^2\,\text{ب جب}^2\,\text{ج}}$

اس لئے $\text{جب ا} = \dfrac{\sqrt{1-\text{جم}^2\,\text{ا} - \text{جم}^2\,\text{ب} - \text{جم}^2\,\text{ج} + 2\,\text{جم ا جم ب جم ج}}}{\text{جب ب جب ج}}$

بائیں طرف کے جذر کو مثبت علامت کے ساتھ لینا چاہئے کیونکہ دفعات ۲۲ اور ۲۳ کے قیود کی وجہ سے جب ب، جب ج اور جب ا سب مثبت ہیں۔

(۲۵) **صورت دوم۔ دو ضلع اور انکے متقابل کے زاویے**

۴۶ - پچھلے دفعہ میں جب ا کی جو قیمت معلوم کی گئی ہے اسکی مدد سے ہم حسب ذیل نتیجے پر پہنچتے ہیں

$$\frac{\text{جب ا}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{جب ج}}{\text{جب ج}} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

کیونکہ انمیں سے ہر ایک

$$\frac{\sqrt{1-\text{جم}^2\,\text{ا} - \text{جم}^2\,\text{ب} - \text{جم}^2\,\text{ج} + 2\,\text{جم ا جم ب جم ج}}}{\text{جب ا جب ب جب ج}} \quad \ldots\ldots (6)$$

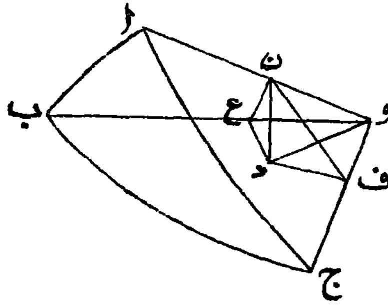
کے مساوی ہے۔

پس کروی مثلث کے زاویوں کی جیوب متقابل اضلاع کی

جیوب کے متناسب ہوتی ہیں۔ دفعہ آیندہ میں ہم اس کا غیر تابع ثبوت دینگے۔

۴۷۔ کروی مثلث کے زاویوں کی جیوب متقابل اضلاع کی جیوب کے متناسب ہوتی ہیں[1]۔

فرض کرو کہ ا ب ج کروی مثلث ہے اور و کرہ کا مرکز ہے۔ و ا میں کوئی نقطہ ن لو، مستوی ب و ج پر عمود ن د کھینچو اور د سے د ع، د ف علی الترتیب و ب، و ج پر عمود کھینچو۔ ن ع، ن ف، و د کو ملاؤ۔



اب چونکہ ن د مستوی ب و ج پر عمود ہے اسلئے یہ ہر اُس خط پر عمود ہے جو اس مستوی میں اس سے ملتا ہے۔ اس لئے

ن ع² = ن د² + د ع² = ن و² - و د² + د ع² = ن و² - و ع²

(۲۶) پس ن ع و زاویہ قائمہ ہے۔ اس لئے ن ع = و ن جب ن و ع = و ن جب ج، اور ن د = ن ع جب ن ع د = ن ع جب ب = و ن جب ج جب ب،

اسی طرح ن د = و ن جب ب جب ج،

اس لئے و ن جب ج جب ب = و ن جب ب جب ج

---

[1] علم مثلث کروی کا یہ اساسی مسئلہ ذرا مختلف شکل میں Sphaerica of Menelaus کی تیسری جلد میں ملتا ہے۔

اسلئے

جب ب / جب ب = جب ج / جب ج

شکل میں یہ فرض کیا گیا ہے کہ ب، ج، ب اور ج میں سے ہر ایک زاویہ قائمہ سے کم ہے۔ لیکن شکل میں مناسب ترمیم کرنے سے یہ معلوم ہوگا کہ ہر ممکن صورت کے لئے ثبوت بالا درست ہے۔ اس طرح اگر صرف ب قائمہ سے بڑا ہو تو نقطہ د، و ب اور و ج کے درمیان واقع ہونے کی بجائے و ب کی دوسری جانب واقع ہوگا؛ اس صورت میں ن ع د، ب کا تکملہ ہوگا اور اس طرح جب ن ع د پھر بھی جب ب کے مساوی ہوگا۔

صورت سوم۔ دو ضلع، انکا درمیانی زاویہ اور کوئی دوسرا زاویہ

۴۸ — ثابت کرو کہ مم ا جب ب = مم ا جب ج + جم ب جم ج

ہم جانتے ہیں کہ

جم ا = جم ب جم ج + جب ب جب ج جم ا ،

جم ج = جم ا جم ب + جب ا جب ب جم ج ،

جب ج = جب ا (جب ج / جب ا)

جم ج اور جب ج کی قیمتوں کو پہلی مساوات میں درج کرو تو

جم ا = (جم ا جم ب + جب ا جب ب جم ج) جم ب + (جب ا جب ب جم ا جب ج) / جب ا

عمل انتقال سے

جم ا جب² ب = جب ا جب ب جم ب جم ج + جب ا جب ب مم ا جب ج

اس کو جب ا جب ب سے تقسیم کرو تو

مم ا جب ب = جم ب جم ج + مم ا جب ج .... (۷)

۴۹ — پچھلے دفعہ کے ضابطہ کے نمونہ کے اور پانچ ضابطے حروف کو آپس میں تبدیل

کرنے سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ یہ کُل چھ ضابطے ذیل میں درج ہیں:-

(۲۷)
مم ا جب ب = مم ا جب ج + جم ب جم ج
مم ب جب ا = مم ب جب ج + جم ا جم ج
مم ب جب ج = مم ب جب ا + جم ج جم ا
مم ج جب ب = مم ج جب ا + جم ب جم ا ...... (۸)
مم ج جب ا = مم ج جب ب + جم ا جم ب
مم ا جب ج = مم ا جب ب + جم ج جم ب

ان ضابطوں میں سے ہر ضابطہ میں دو زاویے اور دو ضلع شریک ہیں جنمیں سے وہ زاویہ جو دو ضلعوں کے درمیان ہے اندرونی زاویہ کہلا سکتا ہے اور وہ ضلع جو دو زاویوں کے درمیان ہے اندرونی ضلع کہلا سکتا ہے۔ تب ضابطہ کو الفاظ میں یوں بیان کیا جا سکتا ہے:-

(اندرونی ضلع کی جیب التمام) (اندرونی زاویہ کی جیب التمام)
= (اندرونی ضلع کی جیب) (دوسرے ضلع کا مماس التمام) - (اندرونی ضلع کی جیب)
× (دوسرے زاویہ کا مماس التمام)

ضابطوں کا یہ لفظی بیان ان کو یاد رکھنے میں آسانی پیدا کرتا ہے۔

صورت اول کے دوسرے ضابطے

۵۰ - مثلث کے کسی زاویئے کے نصف کی جیب، جیب التمام، مماس کو ضلعوں کے تفاعلوں کی رقوم میں بیان کرنا۔

دفعہ ۴۲ کی رو سے $\text{جم ا} = \dfrac{\text{جم ا} - \text{جم ب جم ج}}{\text{جب ب جب ج}}$

اسلئے $1 - \text{جم ا} = 1 - \dfrac{\text{جم ا} - \text{جم ب جم ج}}{\text{جب ب جب ج}} = \dfrac{\text{جم (ب - ج)} - \text{جم ا}}{\text{جب ب جب ج}}$

اسلئے $\text{جب}^{۲}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \frac{\text{جب}\,\frac{۱}{۲}(\text{ا}+\text{ب}-\text{ج})\ \text{جب}\,\frac{۱}{۲}(\text{ا}-\text{ب}+\text{ج})}{\text{جب ب جب ج}}$ ......(۹)

فرض کرو کہ ۲ س = ا + ب + ج یعنے س ، اضلاع کے مجموعہ کا نصف ہے۔ اس مفروض سے

ا + ب − ج = ۲ س − ۲ ج اور ا − ب + ج = ۲ س − ۲ ب

اس لئے $\text{جب}^{۲}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \frac{\text{جب}(\text{س}-\text{ب})\ \text{جب}(\text{س}-\text{ج})}{\text{جب ب جب ج}}$ ......(۱۰)

(۲۸) اور $\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \sqrt{\frac{\text{جب}(\text{س}-\text{ب})\ \text{جب}(\text{س}-\text{ج})}{\text{جب ب جب ج}}}$ ......$\frac{\text{ا}}{(۱۱)}$

نیز $۱+\text{جم ا} = ۱ + \frac{\text{جم ا}-\text{جم ب جم ج}}{\text{جب ب جب ج}} = \frac{\text{جم ا}-\text{جم}(\text{ب}+\text{ج})}{\text{جب ب جب ج}}$

اس لئے

$$\text{جم}^{۲}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \frac{\text{جب}\,\frac{۱}{۲}(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})\ \text{جب}\,\frac{۱}{۲}(\text{ب}+\text{ج}-\text{ا})}{\text{جب ب جب ج}}$$

$= \frac{\text{جب س}\ \text{جب}(\text{س}-\text{ا})}{\text{جب ب جب ج}}$ .....(۱۲)

اور $\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \sqrt{\frac{\text{جب س}\ \text{جب}(\text{س}-\text{ا})}{\text{جب ب جب ج}}}$ ....$\frac{\text{ا}}{(۱۳)}$

جب $\frac{\text{ا}}{۲}$ اور جم $\frac{\text{ا}}{۲}$ کی قیمتوں سے یہ ماخوذ ہوتا ہے کہ

$\text{مس}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \sqrt{\frac{\text{جب}(\text{س}-\text{ب})\ \text{جب}(\text{س}-\text{ج})}{\text{جب س}\ \text{جب}(\text{س}-\text{ا})}}$ ......$\frac{\text{ا}}{(۱۴)}$

ل۔ یولر ۱۷۵۳ء

اس دفعہ میں ہر جذر المربع کی علامت مثبت لینی چاہیئے کیونکہ $\frac{1}{2}$ ا زاویہ قائمہ سے کم ہے اور اس لئے اس کی جیب، جیب التمام، اور مماس سب کے سب مثبت ہیں۔

۵۱ — چونکہ $\text{جب ا} = ۲\ \text{جب}\ \frac{1}{2}\text{ا}\ \text{جم}\ \frac{1}{2}\text{ا}$ اس لئے

$$\text{جب ا} = \frac{۲}{\text{جب ب جب ج}}\left\{\text{جب س جب(س-ا) جب(س-ب) جب(س-ج)}\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۵)$$

دفعہ ۴۵ میں جب ا کے لئے جو جملہ دیا گیا ہے اگر اُس کے شمار کنندہ کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جائے (دیکھو مصنف کا "علم مثلث مستوی" دفعہ ۱۱۵) تو وہ جملہ اوپر کے جملہ کے مماثل ہو جاتا ہے۔ جب ا کی مندرجہ بالا قیمت میں جو جملہ علامت جذر کے اندر ہے اس کے لئے ایک خاص علامت ن کا استعمال کرنا باعث سہولت ہوگا، اس طرح

$$\text{ن}^{۲} = \text{جب س جب(س-ا) جب(س-ب) جب(س-ج)} \qquad (۱۶)$$

اور [1]

$$۴\ \text{ن}^{۲} = ۱ - \text{جم}^{۲}\text{ا} - \text{جم}^{۲}\text{ب} - \text{جم}^{۲}\text{ج} + ۲\ \text{جم ا جم ب جم ج} \qquad (۱۷)$$

ن جس جملہ کو تعبیر کرتا ہے وہ اسقدر کثرت سے علم مثلث کروی میں استعمال ہوتا (۲۹)
ہے کہ اس کے لئے ایک جداگانہ نام تجویز کرنا مناسب ہے۔ لیج (Leige) کے پروفیسر نیوبرگ (Prof. Neuberg) کا یہ مشورہ ہے کہ اس کو مثلث کے **ضلعوں کا عمید** (Norm) کہا جائے اور اس کے جواب میں زاویوں کے مجملوں کا جو تفاعل ملتا ہے اسکو **زاویوں کا عمید** جسے بالعموم ف سے تعبیر کیا جائے گا۔ لیکن پروفیسر (von Staudt) [2] ۲ ن کو اُس سہ سطحی زاویہ کی **جیب** کہتا ہے جو مثلث کے محاذی کرہ کے مرکز پر بنتا ہے اور اختصاراً ۲ ن کو صرف **مثلث کی جیب** کہدیتا ہے۔[3]

---

[1] ن کے یہ جملے یولر نے دئے ہیں (Novi Commentarii Petropolitani, vol IV, P. 158)

[2] Crelle's Journal, XXIV, 1842 P. 252

[3] مستوی مثلث کا رقبہ دو ضلعوں اور ان کے درمیانی زاویہ کی جیب کے حاصل ضرب کا نصف ہوتا ہے اور چار سطحی کا حجم تین کناروں اور انکے درمیانی سہ سطحی زاویہ کی جیب کے حاصل ضرب کا $\frac{1}{6}$۔ ان دو مجموں کی مشابہت کی وجہ سے (Von Staudt) نے اس طریقہ تسمیہ کو استعمال کیا ہے۔

اسی طرح ۲ ت، قطبی مثلث کی جیب ہے۔

۵۲ ۔ اظلال سے ضابطوں کو اخذ کرنا۔ علم مثلث کروی کی اساسی مساواتوں

کو حاصل کرنے کا حسب ذیل طریقہ جو مختصر ہے کرنل اے۔ آر کلارک کی Geodesy میں دیا گیا ہے[1]۔ یہ طریقہ ہندسی اظلال کے اصولوں پر منحصر ہونے کی وجہ سے تمام قسم کے مثلثوں پر حاوی ہے، ضلعوں اور زاویوں کی مقداروں پر کوئی قید نہیں ہے۔

کرہ کے مرکز و کو کروی مثلث کے نقاط راس ا، ب، ج سے ملاؤ۔ فرض کرو کہ و ا اور و ب پر ج کے ظل ق اور ر ہیں اور مستوی ا و ب پر اس کا ظل ن ہے۔ نیز فرض کرو کہ و ب پر ق کا ظل س ہے۔

تب و ر = و س + ق ن جم (ج - ½ π)،

ر ن = س ق - ق ن جم ج،

ق ج جب ا = ن ج = ر ج جب ب

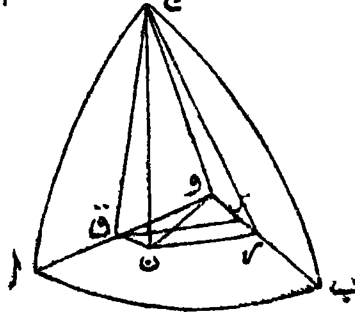
انہیں حسب ذیل اندراجات عمل میں لاؤ

و ر = جم ا، و س = جم ب جم ج،

ر ج = جب ا، ق ن = جب ب جم ا،

و ق = جم ب، ر ن = جب ا جم ب،

ق ج = جب ب، س ق = جم ب جب ج، (۳۰)



---

[1] مقابلہ کرو Gauss, Theoria motus دفعہ ۵۵ کے ساتھ۔

ان اندراجات سے ہمیں حسب ذیل مساواتیں فوراً حاصل ہوتی ہیں:-

جم ا = جم ب جم ج + جب ب جب ج جم ا ...... (۱۸)

جب ا جم ب = جم ب جب ج - جب ب جم ج جم ا .... (۱۹)

جب ا جب ب = جب ب جب ا .... (۲۰)

ان میں سے پہلی اور تیسری مساواتیں معیاری شکلیں ہیں۔ اگر ہم دوسری مساوات کی طرفین کو جب ا سے ضرب دیں اور پھر انکو تیسری مساوات کی متناظر طرفین سے تقسیم کریں تو معیاری ضابطہ

جب ا ہم ب = جب ج ہم ب - جم ج جم ا .... (۲۱)

حاصل ہوتا ہے۔

۵۳ — ضابطوں (۱۸)، (۱۹)، اور (۲۰) کے جواب میں مستوی مثلث کے ضابطے حسب ذیل ہیں

ا^2 = ب^2 + ج^2 - ۲ ب ج جم ا .... (۱۸َ)

ا جم ب = ج - ب جم ا .... (۱۹َ)

ا جب ب = ب جب ا .... (۲۰َ)

جیساکہ پندرھویں باب کے طریقہ کو عمل میں لانے سے واضح ہوگا۔ اسی وجہ سے اور چونکہ اظلال کی مدد سے ثبوت دینے میں یہ خود پیش ہو جاتے ہیں انکو کروی مثلث کے اساسی ضابطوں کے نام سے بجا طور پر موسوم کیا جاسکتا ہے۔ Chauvenet نے علم ہیئت پر اپنی تصنیف میں ہر جگہ ان ضابطوں کو استعمال کیا ہے، اور یہ آسانی کے ساتھ

جم ب = ر جم طہ، جب ب جم ا = ر جب طہ ..... (۲۲)

رکھنے سے لوگارثموں کے لئے موزوں ہو جاتے ہیں۔ (۱۸) اور (۱۹) میں ان کو درج کرنے سے حاصل ہوگا

جم ا = ر جم (ج - طہ)
جب ا جم ب = ر جب (ج - طہ) } .... (۲۳)

انگریزی کتابوں میں عام طور پر ضابطہ (۱۹) کی بجائے ضابطہ (۲۱) کو معیاری ضابطوں میں شمار کیا جاتا ہے۔ (۳۱)

صورت چہارم - تین زاوئے اور ایک ضلع

۵۴ - مثلث کے کسی ضلع کی جیب التمام کو زاویوں کی جیوب و جیوب التمام کی رقوم میں بیان کرنا -

دفعہ ۴۸ کی مدد سے دفعہ ۴۲ کے ضابطوں میں ہم ضلعوں کو متناظر زاویوں کے تکملوں میں اور زاوئے کو متناظر ضلع کے تکملہ میں تبدیل کر سکتے ہیں چنانچہ

جم (π - ا) = جم (π - ب) جم (π - ج) + جب (π - ب) جب (π - ج) جم (π - ا)

یعنے جم ا = - جم ب جم ج + جب ب جب ج جم ا
اسی طرح جم ب = - جم ج جم ا + جب ج جب ا جم ب ...... (۲۴)[له]
اور جم ج = - جم ا جم ب + جب ا جب ب جم ج

۵۵ - ظاہر ہے کہ دفعہ ۴۹ کے ضابطے لازماً درست رہینگے اگر ہم زاویوں اور ضلعوں کو علی الترتیب متناظر ضلعوں اور زاویوں کے تکملوں میں تبدیل کریں، اگرچہ اس طریق عمل سے کوئی نیا ضابطہ حاصل نہ ہوگا لیکن اس سے ضابطوں کو صحیح طور پر یاد رکھنے میں کچھ مدد ملے گی -

۵۶ - مثلث کے کسی ضلع کے نصف کی جیب، جیب التمام اور مماس کو زاویوں کے تفاعلوں کی رقوم میں بیان کرنا -

دفعہ ۵۴ کی رو سے جم ا = (جم ا + جم ب جم ج) / (جب ب جب ج)

اسلئے ۱ - جم ا = ۱ - (جم ا + جم ب جم ج) / (جب ب جب ج) = - (جم ا + جم (ب + ج)) / (جب ب جب ج)

له ان ضابطوں کو سب سے پہلے Vieta نے اپنی (Variorum de rebus mathematicis responsorum) کی آٹھویں جلد میں ۱۵۹۵ء میں شائع کیا تھا۔

اسلئے
$$\text{جب}^{2}\,\frac{\text{ا}}{2} = -\frac{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})\,\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ب}+\text{ج}-\text{ا})}{\text{جب ب جب ج}} \quad \ldots\ldots (۲۵)$$

فرض کرو کہ ۲س = ا + ب + ج تو　(۳۴)

ب + ج − ا = ۲(س − ا)، اسلئے

$$\text{جب}^{2}\,\frac{\text{ا}}{2} = -\frac{\text{جم س جم}\,(\text{س}-\text{ا})}{\text{جب ب جب ج}} \quad \ldots\ldots (۲۶)$$

اور
$$\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{2} = \sqrt{-\frac{\text{جم س جم}\,(\text{س}-\text{ا})}{\text{جب ب جب ج}}} \quad \ldots\ldots (۲۷)$$

نیز
$$1+\text{جم ا} = 1+\frac{\text{جم ا}+\text{جم ب جم ج}}{\text{جب ب جب ج}} = \frac{\text{جم ا}+\text{جم}\,(\text{ب}-\text{ج})}{\text{جب ب جب ج}}$$

اس لئے

$$\text{جم}^{2}\,\frac{\text{ا}}{2} = \frac{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب}+\text{ج})\,\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب}-\text{ج})}{\text{جب ب جب ج}}$$

$$= \frac{\text{جم}\,(\text{س}-\text{ب})\,\text{جم}\,(\text{س}-\text{ج})}{\text{جب ب جب ج}} \quad \ldots\ldots (۲۸)$$

اور
$$\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{2} = \sqrt{\frac{\text{جم}\,(\text{س}-\text{ب})\,\text{جم}\,(\text{س}-\text{ج})}{\text{جب ب جب ج}}} \quad \ldots\ldots (۲۹)$$

پس
$$\text{مس}\,\frac{\text{ا}}{2} = \sqrt{-\frac{\text{جم س جم}\,(\text{س}-\text{ا})}{\text{جم}\,(\text{س}-\text{ب})\,\text{جم}\,(\text{س}-\text{ج})}} \quad \ldots\ldots (۳۰)$$

اس دفعہ میں جو جذر واقع ہوئے ہیں انکی علامتیں مثبت قرار دینی چاہئیں کیونکہ $\frac{\text{ا}}{2}$ زاویہ قائمہ سے کم ہے۔

اس دفعہ کے ضابطے دفعہ ۵۰ کے ضابطوں پر دفعہ ۲۸ کا طریقہ استعمال کرنے سے بھی حاصل ہو سکتے ہیں۔

۵۷ — یہ معلوم رہے کہ جب $\frac{\text{ا}}{2}$، جم $\frac{\text{ا}}{2}$، اور مس $\frac{\text{ا}}{2}$ کی قیمتیں حقیقی ہیں کیونکہ دفعہ ۳۲ میں

یہ بتلایا جاچکا ہے کہ مثلث کے زاویوں کا مجموعہ ۲ س، دو قائمہ زاویوں سے بڑا اور چھ قائمہ زاویوں سے کم ہوتا ہے۔ اس لئے س ایک زاویہ قائمہ سے بڑا اور تین قائمہ زاویوں سے کم ہے اور اس لئے جم س منفی ہے۔ نیز قطبی مثلث میں کوئی ضلع باقی دوسرے دو ضلعوں کے مجموعے سے کم ہے اور یہ تینوں ضلع زاویوں ا، ب، ج کے تکملے ہیں۔ پس π - ا، π - ب + π - ج سے کم ہے اسلئے ب + ج - ا، π سے کم ہے یعنے س - ا، $\frac{1}{2}\pi$ سے کم ہے۔ نیز چونکہ ا، π سے متجاوز نہیں ہوسکتا، اسلئے ب + ج - ا جبری طور پر $-\pi$ سے بڑا ہے یعنے س - ا جبری طور پر $-\frac{1}{2}\pi$ سے بڑا ہے۔ اس لئے س - ا کی قیمت $-\frac{1}{2}\pi$ اور $\frac{1}{2}\pi$ کے درمیان واقع ہے اور اسلئے جم (س - ا) **مثبت** ہے۔ اسی طرح جم (س - ب) اور جم (س - ج) بھی مثبت ہیں۔ پس جب² ½ ا، جم² ½ ا، اور مس² ½ ا کیلئے جو جملے اوپر دریافت کئے گئے ہیں وہ مثبت ہیں اور ان کے جذرالمربع حقیقی ہیں۔

۵۸ — چونکہ جب ا = ۲ جب ½ا جم ½ا، ہم حاصل کرتے ہیں (۳۳)

$$\text{جب ا} = \frac{2}{\text{جب ب جب ج}}\left\{-\text{جم س جم (س - ا) جم (س - ب) جم (س - ج)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

(۳۱) ....

جملہ

$$\left\{-\text{جم س جم (س - ا) جم (س - ب) جم (س - ج)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$ [له]

کو ہم ن سے تعبیر کرینگے۔

۵۹ — تکملی مثلثوں کے خواص ہندسی طور پر دفعہ ۲۷ میں ثابت کئے گئے تھے اور ان خواص کے ذریعہ دفعہ ۵۴ کے ضابطے حاصل کئے گئے لیکن یہ ضابطے تحلیلی طور پر دفعہ ۴۴ کے ضابطوں سے بھی اخذ کئے جاسکتے ہیں اور اس طرح پورے مضمون کی بنیاد دفعہ ۴۴ کے ضابطوں پر رکھی جاسکتی ہے۔

[له] لیکسل Lexell نے ن کی قیمت کو تعبیر کرنے کے لئے مختلف جملے حاصل کئے تھے (Acta Petropolitana, 1782, p. 49)

کیونکہ دفعہ ۴۴ سے ہمیں جم ا، جم ب، جم ج کے لئے جملے ملتے ہیں اور پھر ان سے ہم حاصل کرتے ہیں

جم ا + جم ب جم ج

= (جم ا - جم ب جم ج) جب۲ ا + (جم ب - جم ج جم ا) (جم ج - جم ا جم ب)
―――――――――――――――――――――
جب۲ ا جب ب جب ج

اس کسر کے شمارکنندہ میں جب۲ ا کی بجائے ۱ - جم۲ ا لکھو تو شمارکنندہ

جم ا (۱ - جم۲ ا - جم۲ ب - جم۲ ج + ۲ جم ا جم ب جم ج)

میں تحویل ہو جائیگا اور یہ دفعہ ۴۶ کی بموجب جم ا جب ب جب ج جب۲ ا جب ب جب ج کے مساوی ہے۔

اس لئے جم ا + جم ب جم ج = جم ا جب ب جب ج

اسی طرح اس نمونہ کے دوسرے دو ضابطے ثابت کئے جا سکتے ہیں۔

اس طرح دفعہ ۴۵ کے ضابطوں کی توثیق ہو گئی اور اس لئے قطبی مثلث کے خواص اور اس کے وجود کو مانے بغیر ہم مسئلہ ذیل اخذ کرتے ہیں:-

اگر کروی مثلث کے ضلع اور زاویے علی الترتیب متناظر زاویوں اور ضلعوں کے تکملوں میں بدل دئے جائیں تو دفعہ ۴۴ کے اساسی ضابطے درست رہتے ہیں اور اسلئے وہ سب نتیجے بھی جو ان سے اخذ ہو سکتے ہیں۔

فصل دوم

پانچ یا چھ عناصر پر مشتمل ضابطے

۶۰ - نیپیر کی تمثیلات[1] -

ہم جانتے ہیں کہ

[1] جو ضابطے اس نام سے موسوم ہیں انکو نیپیر نے منکشف کیا تھا اس نے انہیں ۱۶۱۴ء میں (Mirifici Logarithmorum canonis descriptio ejusque usus in utraque trigonometria. میں شائع کیا۔

جب ا / جب ا = جب ب / جب ب = م فرض کرو ....(۳۲)

اور اس لئے

جب ا + جب ب = م (جب ا + جب ب) ....(۳۳)

جب ا − جب ب = م (جب ا − جب ب) ....(۳۴)

اب جم ا + جم ب جم ج = جب ب جب ج جم ا = م جب ج جب ب جم ا

اور جم ب + جم ا جم ج = جب ا جب ج جم ب = م جب ج جب ا جم ب

اس لئے جمع کرنے سے

(جم ا + جم ب)(۱ + جم ج) = م جب ج جب (ا + ب) ......(۳۵)

اس لئے (۳۳) کی رُو سے

(جب ا + جب ب) / (جم ا + جم ب) = (جب ا + جب ب) / جب (ا + ب) × (۱ + جم ج) / جب ج

یعنی　مس ½ (ا + ب) = جم ½ (ا − ب) / جم ½ (ا + ب) مم ½ ج ....(۳۶)

اسی طرح (۳۵) اور (۳۴) سے

(جب ا − جب ب) / (جم ا + جم ب) = (جب ا − جب ب) / جب (ا + ب) × (۱ + جم ج) / جب ج

یعنی　مس ½ (ا − ب) = جب ½ (ا − ب) / جب ½ (ا + ب) مم ½ ج ....(۳۷)

تیز قطبی مثلث کے عناصر کو (۳۶) اور (۳۷) میں مندرج کرنے سے

مس ½ (ا + ب) = جم ½ (ا − ب) / جم ½ (ا + ب) مس ½ ج .....(۳۸)

مس ½ (ا − ب) = جب ½ (ا − ب) / جب ½ (ا + ب) مس ½ ج .....(۳۹)

(۳۵)　ضابطوں (۳۶)، (۳۷)، (۳۸)، (۳۹) کو تناسبوں یا تمثیلات کی شکل میں

رکھا جا سکتا ہے اور ان کو نیپیر کی تمثیلات کہا جاتا ہے کیونکہ اس نے ہی ان کو معلوم کیا تھا۔ آخری دو ضابطے قطبی مثلث کی مدد کے بغیر دفعہ ۴۴ کے ضابطوں سے ابتدا کر کے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

۶۱ ۔ پچھلے دفعہ کی مساوات (۳۶) میں جم $\frac{1}{2}$ (ا - ب) اور جم $\frac{1}{2}$ ج ضرور مثبت مقداریں ہیں؛ پس اس مساوات سے یہ امر واضح ہے کہ مس $\frac{1}{2}$ (ا + ب) اور جم $\frac{1}{2}$ (ا + ب) ایک ہی علامت کے ہونے چاہئیں؛ اس طرح $\frac{1}{2}$ (ا + ب) اور $\frac{1}{2}$ (ا + ب) دونوں زاویہ قائمہ سے کم ہیں یا دونوں زاویہ قائمہ سے بڑے؛ اس کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ $\frac{1}{2}$ (ا + ب) اور $\frac{1}{2}$ (ا + ب) موانس زاویے (Angles of the same affection) ہیں۔

۶۲ ۔ **نیپیر کی تمثیلات کا دوسرا ثبوت** ۔ دفعہ ۶۰ کے ثبوت کی ابتدا مثلث کے اساسی ضابطوں سے ہوئی ہے لیکن اگر دفعہ ۵۰ کے ان ضابطوں کو استعمال کیا جائے جو نصف زاویوں کے مماسوں کو ضلعوں کی رقوم میں بیان کرتے ہیں تو ایک مختصر ثبوت دیا جا سکتا ہے۔

کیونکہ ان ضابطوں سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ا}\ \text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ب} = \frac{\text{جب}(\text{س} - \text{ج})}{\text{جب}\ \text{س}} \quad \ldots\ldots (۴۰)$$

اور اسی طرح مماسوں کے دوسرے حاصل ضرب معلوم کئے جا سکتے ہیں۔ پس ان کو مساوات متماثلہ

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})\ \text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ج} = \frac{\text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ب}\ \text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ج} + \text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ج}\ \text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ا}}{1 - \text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ا}\ \text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ب}}$$

کی بائیں جانب درج کرنے سے

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})\ \text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ج} = \frac{\text{جب}(\text{س}-\text{ا}) + \text{جب}(\text{س}-\text{ب})}{\text{جب}\ \text{س} - \text{جب}(\text{س}-\text{ج})} = \frac{\text{جم}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{جم}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots (۴۱)$$

اور اسی طرح

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب})\ \text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ج} = \frac{\text{جب}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{جب}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})} \quad \ldots\ldots (۴۲)$$

یہ ضابطے نتیجوں (۳۶) اور (۳۷) کے مماثل ہیں — نتیجوں (۳۸) اور (۳۹) کو اسی طرح اُن ضابطوں سے حاصل کیا جا سکتا ہے جو نصف ضلعوں کے مماسوں کو زاویوں کی رقوم میں بیان کرتے ہیں۔ (۳۶)

۶۳ — ڈلمبر کی تمثیلات — مساوات متماثلہ

$$\text{جب}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب}) = \text{جب}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ا}\ \text{جم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ب} + \text{جم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ا}\ \text{جب}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ب}$$

میں نصف زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کی بجائے وہ جملے رکھو جو ان کے لئے دفعہ ۵۰ میں حاصل ہوئے ہیں تو

$$\text{جب}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب}) = \frac{\text{جب}(\text{س}-\text{ب}) + \text{جب}(\text{س}-\text{ا})}{\text{جب ج}} \sqrt{\frac{\text{جب س جب}(\text{س}-\text{ج})}{\text{جب ا جب ب}}}$$

$$= \frac{\text{جب}(\text{س}-\text{ب}) + \text{جب}(\text{س}-\text{ا})}{\text{جب ج}}\ \text{جم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ج}$$

اور اسلئے

$$\frac{\text{جب}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})}{\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ج}} = \frac{\text{جم}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ج}} \quad \ldots\ldots (۴۳)$$

ٹھیک اسی طرح یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\frac{\text{جب}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ج}} = \frac{\text{جب}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ج}} \quad \ldots\ldots (۴۴)$$

$$\frac{\text{جم}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})}{\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ج}} = \frac{\text{جم}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})}{\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ج}} \quad \ldots\ldots (۴۵)$$

$$\frac{\text{جم}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ج}} = \frac{\text{جب}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})}{\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ج}} \quad \ldots\ldots (۴۶)$$

ان ضابطوں کو بعض اوقات گاس کے مسئلے کہا جاتا ہے لیکن یہ درست نہیں ہے کیونکہ ڈلمبر نے اول انکو دریافت کیا تھا گاس نے (Theoria motus corporum coelestinm دفعہ ۵۴) میں ڈلمبر نے (Connaissance des Tems, 1809, P. 443) میں اور مال وئیڈ نے (Zach's Monatliche Correspondenz, 1808, P. 394) میں ان ضابطوں کو تقریباً ایک ساتھ شائع کیا۔ دیکھو فلاسیفیکل میگزین بابتہ ۱۸۶۳ء۔

۴۴ — نیپیر کی تمثیلات ڈلمبر کی تمثیلات سے صرف عمل تقسیم سے اخذ کیجا سکتی ہیں، چنانچہ اگر مساوات (۴۶) کی طرفین کو مساوات (۴۵) کی تناظر طرفین سے تقسیم کیا جائے تو نیپیر کی تیسری تمثیل حاصل ہوتی ہے۔

ڈلمبر کی تمثیلات نیپیر کی تمثیلات سے حسب طریقہ ذیل حاصل ہوسکتی ہیں:۔
نیپیر کی پہلی تمثیل (۳۶) کا مربع لیکر حاصل شدہ مساوات کی طرفین میں ایک جمع کرو تو مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\text{قط}^2 \tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب}) = \frac{\text{جم}^2\tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب})\text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{ج} + \text{جم}^2\tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})\text{جب}^2\tfrac{1}{2}\text{ج}}{\text{جم}^2\tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})\text{جب}^2\tfrac{1}{2}\text{ج}} \ldots (۴۷)$$

(۴۷) بائیں جانب کی کسر کا شمار کنندہ

$$= \tfrac{1}{2}\{1+\text{جم}(\text{ا}-\text{ب})\}\text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{ج} + \tfrac{1}{2}\{1+\text{جم}(\text{ا}+\text{ب})\}\text{جب}^2\tfrac{1}{2}\text{ج}$$

$$= \tfrac{1}{2}\{1+\text{جم ا جم ب} + \text{جب ا جب ب جم ج}\}$$

$$= \tfrac{1}{2}(1+\text{جم ج}) = \text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{ج}$$

اسلئے

$$\text{قط}^2\tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب}) = \frac{\text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{ج}}{\text{جم}^2\tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})\text{جب}^2\tfrac{1}{2}\text{ج}} \ldots\ldots (۴۸)$$

جذر المربع لو اور علامت کا تعین کرو اس امر سے کہ $\tfrac{1}{2}$(ا+ب) اور $\tfrac{1}{2}$(ا+ب) موانس زاوئے ہیں تو حاصل ہوگا

$$\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج} = \text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ج} \ldots\ldots (۴۹)$$

اسی طرح نیپیر کی دوسری تمثیل (۳۷) سے

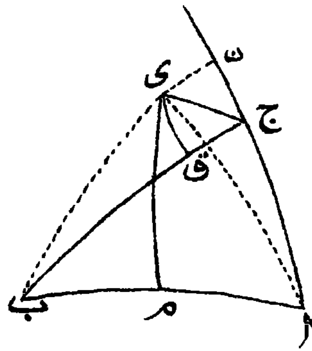
$$\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب})\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ج} = \text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ج} \ldots\ldots (۵۰)$$

یہ ڈلمبر کی تیسری اور چوتھی تمثیلات ہیں، ان کو علی الترتیب نیپیر کی پہلی اور دوسری

تمثیلوں سے ضرب دیکر ڈلمبر کی دوسری دو تمثیلات حاصل کیجا سکتی ہیں۔

۶۵ — ڈلمبر اور نیپیر کی تمثیلات کا ہندسی ثبوت[1]۔

ضلع ج ب کو قوس م ی سے علی القوائم تنصیف کرو اور فرض کرو کہ یہ قوس زاویہ ج کے بیرونی ناصف کو نقطہ ی پر ملتی ہے۔



مثلث کے اضلاع ب، د پر علی الترتیب قوس ی ن، ی ق عمود وار کھینچو۔ چونکہ ی ن = ی ق اور ی ا = ی ب اور ن اور ق پر کے زاوئے قائمہ ہیں اس لئے مثلثات ا ی ن، ب ی ق ہر طرح ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔ (۳۸)

پس یہ معلوم ہوگا کہ

$$\left.\begin{aligned} \angle\, \text{ی ا ن} &= \angle\, \text{ی ب ق} = \tfrac{1}{2}(\text{ا} - \text{ب}) \\ \angle\, \text{ی ا م} &= \angle\, \text{ی ب م} = \tfrac{1}{2}(\text{ا} + \text{ب}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(۵۱)$$

---

[1] اصولاً غیر مختلف۔ Crofton, Proc. London Mathematical Society, III.
ثبوت Gudermann کی Lehrbuch der niederen Spharik کے دفعہ ۴۴ میں
اور Grunert's Archiv der Mathematik XXVII 1856 میں
Essen کے ایک مضمون میں ملیگی۔

نیز چونکہ ج ن = ج ق ' اس لئے

ب ق = ا ن = ½ (ا + ب)
ج ق = ج ن = ½ (ا - ب) ....(۵۲)

اب ∠ ا ی ن = ∠ ب ی ق - ان دونوں زاویوں میں زاویہ ا ی ق جمع کرنے سے ∠ ق ی ن = ∠ ب ی ا ' ان دو زاویوں کی تنصیف علی الترتیب ی ج اور ی م سے ہوتی ہے۔ پس دفعہ ۴۵ کا ضابطہ قائم الزاویہ مثلثوں ی ا م ' ی ن ج پر استعمال کرنے سے

جم ا م جب ی ا م = جم م ی ا = جم ج ی ن
= جم ج ن جب ی ج ن

یعنی جم ½ ج جب ½ (ا + ب) = جم ½ ج جم ½ (ا - ب) .....(۵۳)

یہ ڈلمبر کی پہلی تمثیل ہے۔

پھر دفعہ ۴۹ کا ضابطہ قائم الزاویہ مثلثوں ا ی ن ' ج ی ن پر استعمال کرنے سے

جب ½ (ا + ب) مم ی ن = مم ½ (ا - ب) ....(۵۴)
جب ½ (ا - ب) مم ی ن = مم ½ (π - ج) ....(۵۵)

تقسیم کرنے سے جب ½ (ا - ب) / جب ½ (ا + ب) = مس ½ ج مس ½ (ا - ب)...(۵۶)

اور یہ نیپیر کی دوسری تمثیل ہے۔

باقی ضابطے اسی عمل سے یا اس کے مماثل عمل سے جس میں زاویہ ج کی اندرونی طور پر تنصیف کی گئی ہو حاصل ہو سکتے ہیں۔

ڈلمبر کی تمثیلات (۴۳) تا (۴۶) کے سلسلہ میں یہ امر قابل ذکر ہے کہ پہلی اور تیسری تمثیلات ایک دوسرے سے دفعہ ۲۸ کے طریقہ کو استعمال کرنے سے حاصل ہو سکتی ہیں۔ دوسری اور تیسری تمثیلات قطبی مثلث کے عناصر درج کرنے سے نہیں بدلتیں، تاہم وہ ایک دوسرے سے ہم پہلو مثلث کے عناصر درج کرنے سے حاصل ہو سکتی ہیں۔

(۳۹) ۴۷ - اس باب کے ضابطے کروی مثلث سے متعلق مختلف مسئلوں کو تحلیلی طور پر

ثابت کرنے میں استعمال ہو سکتے ہیں خواہ یہ مسئلے پچھلے باب میں ہندسی طور پر ثابت کردیے گئے ہوں یا اس طور پر ثابت کئے جا سکتے ہوں۔ مثلاً نیپیر کی دوسری تمثیل لو

مس ½ (ا - ب) = جب ½ (ا - ب) / جب ½ (ا + ب) مم ½ ج

اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ½ (ا - ب) مثبت، منفی، یا صفر ہے بموجب اس کے کہ ½ (ا - ب) مثبت، منفی، یا صفر ہو؛ اس طرح وہ تمام نتیجے حاصل ہوتے ہیں جو دفعات ۳۵ تا ۳۸ میں درج ہیں۔

٦٧۔ اگر دو کروی مثلثوں میں ایک مثلث کے دو ضلع الگ الگ دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے مساوی ہوں لیکن ایک مثلث کے ان دو ضلعوں کا درمیانی زاویہ دوسرے مثلث کے ضلعوں کے درمیانی زاویہ سے بڑا ہو تو بڑے زاویہ والے مثلث کا قاعدہ دوسرے مثلث کے قاعدہ سے بڑا ہوگا؛ اور بالعکس۔

فرض کرو کہ ب اور ج اُن ضلعوں کو تعبیر کرتے ہیں جو دونوں مثلثوں میں مساوی ہیں۔ فرض کرو کہ ایک مثلث کا قاعدہ ا ہے اور اس کے مقابل کا زاویہ ا، اور دوسرے مثلث کا قاعدہ اَ ہے اور اس کے مقابل کا زاویہ اَ تو

جم ا = جم ب جم ج + جب ب جب ج جم ا

جم اَ = جم ب جم ج + جب ب جب ج جم اَ

اس لئے جم ا - جم اَ = جب ب جب ج (جم ا - جم اَ)

یعنے جب ½ (ا + اَ) جب ½ (ا - اَ) = جب ب جب ج جب ½ (ا + اَ) جب ½ (ا - اَ)

اس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ ½ (ا - اَ) اور ½ (ا - اَ) ہم علامت ہیں۔

۶۸ ـ اگر کرہ پر کے ایک دائرہ کے اندر کوئی نقطہ قطب کے علاوہ لیا جائے تو اس نقطہ سے دائرہ کے محیط تک جتنی قوسیں کھینچی جا سکتی ہیں انہیں سے سب سے بڑی قوس وہ ہے جو قطب میں سے گذرتی ہے اور سب سے چھوٹی قوس وہ ہے جو خارج کرنے پر قطب میں سے گذرتی ہے۔ دوسری قوسوں میں سے وہ قوس جو سب سے بڑی قوس سے قریب تر ہو اُس قوس سے بڑی ہو گی جو سب سے بڑی قوس سے بعید تر ہے۔ اس نقطہ سے محیط تک صرف دو قوسیں کھینچی جا سکتی ہیں جو ایک دوسرے کے مساوی ہوں اور یہ قوسیں سب سے (۴۰)
چھوٹی قوس کے مقابل جوانب اسکے ساتھ مساوی زاوئے بناتی ہیں ـ

پچھلے دفعہ سے یہ مسئلہ فوراً اخذ ہو سکتا ہے ـ

۶۹ ـ ریڈ (Reidt) کی تمثیلات ـ ڈلمبر کی تمثیلوں سے ہم دوسری چار تمثیلیں اخذ کر سکتے ہیں جو مثلثوں کے حل میں استعمال ہو سکتی ہیں۔ ڈاکٹر F. Reidt نے ان کو Sammlung von Ausgaben aus der Trigonometrie und Stereometrie, 1872. میں بیان کیا ہے[1] ـ

انہیں ثابت کرنے میں حسب ذیل اجمالی ترقیم کا استعمال باعث سہولت ہے:ـ

ا + اَ = ۲ س ، ب + بَ = ۲ سَ ، ج + جَ = ۲ سً
ا - اَ = ۲ د ، ب - بَ = ۲ دَ ، ج - جَ = ۲ دً ....(۵۷)

ڈلمبر کی دوسری تمثیل (۴۴) دفعہ ۶۲ سے حاصل ہوتا ہے

[1] چوتھا اڈیشن جلد ۱ دفعہ ۳۷ صفحہ ۲۳۲ ـ نیز دیکھیے
Traite de Serret Trigonometrie, 123.

(جم ½ ج - جب ½ ج) / (جم ½ ج + جب ½ ج) = (جب ½ (ا-ب) - جب ½ (ا-ب)) / (جب ½ (ا-ب) + جب ½ (ا-ب)) ...... (۵۸)

اور جب اس میں جم ½ ج کی بجائے جب (۹۰° - ½ ج) درج کیا جاتا ہے تو یہ مساوات فوراً

مس (۴۵° - سؔ) مم (۴۵° - دؔ) = مم (س - سؔ) مس (د - دؔ) ...... (۵۹)

میں تحویل ہو جاتی ہے۔

اسی طرح ڈلمبر کی تیسری تمثیل‘

مس (۴۵° - سؔ) مس (۴۵° - دؔ) = مس (س + سؔ) مس (د + دؔ) ...... (۶۰)

کے مماثل ہے پہلی اور چوتھی تمثیلات بھی اسی طرح کے طریقہ سے

مس دؔ مس سؔ = مس (۴۵° - س - دؔ) مس (۴۵° - د - سؔ) ...... (۶۱)

اور مس دؔ مم سؔ = مس (۴۵° - س + دؔ) مم (۴۵° - د + سؔ) ...... (۶۲)

میں تحویل ہوتی ہیں۔

اِن سے ہم اعمال ضرب و تقسیم کے ذریعہ دوسرے ضابطے حاصل کرتے ہیں۔ مثلاً (۵۹) اور (۶۰) کی متناظر طرفین کو ضرب دینے سے

مس۲ (۴۵° - سؔ) = مم (س - سؔ) مس (س + سؔ) مس (د - دؔ) مس (د + دؔ) ...... (۶۳)

اور انہی متناظر طرفین کو تقسیم کرتے سے

مس۲ (۴۵° - دؔ) = مس (س - سؔ) مس (س + سؔ) مم (د - دؔ) مس (د + دؔ) ...... (۶۴)

حاصل ہوتے ہیں۔

(۴۱) اسی طرح (۶۱) اور (۶۲) سے

مس۲ دؔ = مس (۴۵° - س - دؔ) مس (۴۵° - س + دؔ) مس (۴۵° - د - سؔ) مس (۴۵° + د - سؔ) ...... (۶۵)

مس ۲ سٓ = مس (۴۵° - س - دَ) مس (۴۵° + س - دَ) مس (۴۵° - د - سَ) مس (۴۵° - د + سَ)

(۶۶) ....

یہ آخری چار رشتے ریڈ کی تمثیلات ہیں۔

کروی مثلثوں کے حل میں (دیکھو دفعہ ۱۰۹) جو مشتبہ صورت ہے اس کے سلسلہ میں یہ دیکھنا ضروری ہے کہ ایک دوسرے مثلث پر جس کے عناصر د، ب، اور ا وہی ہوں جو ابتدائی مثلث کے ہیں لیکن جس میں ب کے مقابل کا زاویہ ۱۸۰° - ب ہو محصلہ بالا ضابطے استعمال کرنے سے کیا نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

اگر تیسرا زاویہ جَ اور تیسرا ضلع جَ ہو تو ضابطوں (۶۵) اور (۶۶) سے حاصل ہوتا ہے

مس ۲ ½ (جَ - ج) = مس (سَ - س) مم (سَ + س) مس (دَ - د) مس (دَ + د)

(۶۷) ....

اور مس ۲ ½ (جَ + ج) = مس (سَ + س) مس (سَ - س) مس (دَ - د) مم (دَ + د)

(۶۸) ....

جب د، ب، اور ب دئے گئے ہوں اور ا معلوم کر لیا گیا ہو تو ضابطے (۶۵) اور (۶۶) ج اور ج کو معلوم کرنے کے لئے اور ضابطے (۶۷) اور (۶۸) جَ اور جَ کو معلوم کرنے کے لئے استعمال کئے جا سکتے ہیں۔

۰۷ ـــ دفعہ (۴۴) کے اساسی ضابطوں کا ہم ایک دوسرا ثبوت دیں گے جو بہت سادہ ہے، صرف ہندسہ تحلیلی کے مبادیات سے واقف ہونا کافی ہے

فرض کرو کہ ا ب ج کوئی کروی مثلث ہے اور و کرہ کا مرکز ہے۔ کرہ کے مرکز و کو محددوں کا مبداء قرار دو اور فرض کرو کہ محوری نقطہ ج میں سے گذرتا ہے۔ فرض کرو کہ ا کے محدد $لا_۱$، $ما_۱$، $ی_۱$ ہیں اور ب کے $لا_۲$، $ما_۲$، $ی_۲$ تو خطہ مستقیم ا ب پر کا مربع

$$= (لا_۱ - لا_۲)^۲ + (ما_۱ - ما_۲)^۲ + (ی_۱ - ی_۲)^۲ \quad ....(۶۹)$$

$$\text{اور نیز} = ر^۲ + ر^۲ - ۲ ر^۲ \text{ جم } ا و ب \quad ....(۷۰)$$

اور $\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 + \text{ی}_1^2 = \text{ر}^2$ ، $\text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2 + \text{ی}_2^2 = \text{ر}^2$

اس لئے $\text{لا}_1\,\text{لا}_2 + \text{ما}_1\,\text{ما}_2 + \text{ی}_1\,\text{ی}_2 = \text{ر}^2 \,\text{جم ا و ب}$ ....(۷۱)

اس میں قائم محددوں کی بجائے قطبی محدد درج کرو یعنی رکھو (۴۲)

$$\left.\begin{array}{l} \text{ی}_1 = \text{ر جم ط}_1 \text{ ، } \text{لا}_1 = \text{ر جب ط}_1 \text{ جم ف}_1 \text{ ، } \text{ما}_1 = \text{ر جب ط}_1 \text{ جب ف}_1 \\ \text{ی}_2 = \text{ر جم ط}_2 \text{ ، } \text{لا}_2 = \text{ر جب ط}_2 \text{ جم ف}_2 \text{ ، } \text{ما}_2 = \text{ر جب ط}_2 \text{ جب ف}_2 \end{array}\right\} \ldots (۷۲)$$

تو $\text{جم ط}_1 \text{ جم ط}_2 + \text{جب ط}_1 \text{ جب ط}_2 \text{ جم } (\text{ف}_1 - \text{ف}_2) = \text{جم ا و ب}$ ..(۷۳)

یعنی ، علم مثلث کروی کی معمولی ترقیم کے لحاظ سے ،

$$\text{جم ا جم ب} + \text{جب ا جب ب جم ج} = \text{جم ج} \ldots\ldots (۷۴)$$

اس طریقۂ ثبوت میں دفعہ ۵۲ کے طریقہ کی طرح یہ فائدہ ہے کہ اس میں ایک بالکل عام ثبوت دیا گیا ہے کیونکہ جتنی مساواتیں اس میں استعمال ہوئی ہیں وہ سب کی سب بالعموم (Universally) درست ہیں۔

امثلہ (ا)

۱ ۔ اگر ا = ا تو ثابت کرو کہ ب اور ب مساوی ہیں یا ایک دوسرے کے تکملہ۔ علیٰ ہذا ج اور ج بھی۔

۲ ۔ اگر مثلث کا ایک زاویہ دو مرے دو زاویوں کے مجموعہ کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ سب سے بڑا ضلع اس فاصلہ کا دگنا ہے جو اسکے وسطی نقطہ اور مقابل کے راس کے درمیان ہے۔

۳ ۔ کس صورت میں قطبی مثلث ابتدائی مثلث پر منطبق ہوگا؟

۴ ۔ اگر اب کا نقطہ وسطی د ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم ا ج} + \text{جم ب ج} = ۲ \text{ جم } \tfrac{1}{2} \text{ ا ب جم ج د}$$

۵ ۔ اگر کروی مثلث کے دو زاویے علی الترتیب اپنے مقابل کے ضلعوں کے

مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ باقی ضلع، باقی زاویہ کا تکملہ ہے؛ یا اگر مثلث کے دو ضلع ربعات ہوں اور دو زاویے قائمہ تو باقی ضلع، باقی زاویے کے مساوی ہے۔

۶ — متساوی الاضلاع مثلث میں ثابت کرو کہ ۲ جم ½ ا جب ½ أ = ۱

۷ — متساوی الاضلاع مثلث میں ثابت کرو کہ مس² ½ ا = ۱ − ۲ جم أ، اور اس لئے وہ حدود معلوم کرو جنکے درمیان متساوی الاضلاع مثلث کے ضلع اور زاویے مقید ہیں۔

۸ — متساوی الاضلاع مثلث میں ثابت کرو کہ قط أ = ۱ + قط ا

۹ — اگر کروی مثلث کے تینوں ضلعوں کو نصف کرکے ایک نیا مثلث بنایا جائے تو ثابت کرو کہ نئے ضلعوں ½ ب اور ½ ج کا درمیانی زاویہ طہ اس مساوات

جم طہ = جم أ + ½ مس ½ ب مس ½ ج جب² طہ

سے حاصل ہوتا ہے۔

۱۰ — کرہ کی سطح پر اب، ج د دو ربعات ہیں جو ایک دوسرے کو نقطہ ع پر قطع کرتے ہیں۔ ان کے سرے بڑے دائروں کی قوسوں سے ملائے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ (۴۳)

جم اع ج = جم اج جم ب د − جم ب ج جم اد

۱۱ — اگر ب + ج = π تو ثابت کرو کہ جب ۲ ب + جب ۲ ج = ۰

۱۲ — اگر د ع، بڑے دائرہ کی قوس ہو جو ایک کروی مثلث کے اضلاع اب، اج کو علی الترتیب نقاط د اور ع پر تنصیف کرتی ہے اور اگر د ع کا قطب ق ہو اور ق ب، ق د، ق ع، ق ج کو ملایا جائے تو ثابت کرو کہ زاویہ ب ق ج = زاویہ د ق ع کا دو چند

۱۳ — کروی مثلث میں ثابت کرو کہ

جب ب جب ج + جم ب جم ج جم أ = جب ب جب ج − جم ب جم ج جم ا

(Cagnoli)

۱۴ — اگر مثلث کے ضلع ب ج میں کوئی نقطہ د ہو تو ثابت کرو کہ

جم اد جب ب ج = جم اب جب د ج + جم اج جب ب د (دفعہ ۱۴۳)

۱۵ـ کروی مثلث میں اگر ا، ب، ج سے بڑے دائروں کی قوسیں طہ، فہ، سہ، مقابل کے ضلعوں پر عمود کھینچی جائیں تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب ا جب طہ} = \text{جب ب جب فہ} = \text{جب ج جب سہ}$$

$$= \sqrt{\text{۱} - \text{جم}^{\text{۲}}\text{ا} - \text{جم}^{\text{۲}}\text{ب} - \text{جم}^{\text{۲}}\text{ج} + \text{۲ جم ا جم ب جم ج}}$$

۱۶ـ کروی مثلث میں اگر طہ، فہ، سہ، وہ قوسیں ہوں جو علی الترتیب زاویوں ا، ب، ج کی تنصیف کرتی ہیں اور مقابل کے ضلعوں پر ختم ہوتی ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\text{مم طہ جم} \tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ا} + \text{مم فہ جم} \tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ب} + \text{مم سہ جم} \tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ج} = \text{مم ا} + \text{مم ب} + \text{مم ج}$$

۱۷ـ دو بندرگاہ ایک ہی عرض بلد کے توازی پر واقع ہیں، ان کا مشترک عرض بلد ل ہے اور انکے طول بلدوں کا فرق ۲لہ ہے۔ ثابت کرو کہ ایک بندرگاہ سے دوسرے بندرگاہ تک مشرق یا مغرب کی سمت میں جانے کی بجائے بڑے دائرہ پر سفر کرنے سے مسافت میں جو بچت ہے وہ ہے

$$\text{۲ر} \left\{ \text{لہ جم ل} - \text{جب}^{-\text{۱}} (\text{جب لہ جم ل}) \right\}$$

جہاں ر زمین کا نصف قطر ہے اور لہ کی پیمائش دائری ناپ میں کی گئی ہے۔

۱۸ـ اگر ایک جہاز یکساں رفتار سے ایک بڑے دائرہ پر سفر کر رہا ہو اور وقت مساوی وقفوں پر مشاہدہ کردہ عرض بلد $\text{ل}_{\text{۱}}$، $\text{ل}_{\text{۲}}$، $\text{ل}_{\text{۳}}$ ہوں جبکہ ہر ایک وقفہ میں فاصلہ طے شدہ س ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{س} = \text{ر جم}^{-\text{۱}} \frac{\text{جب} \tfrac{\text{۱}}{\text{۲}} (\text{ل}_{\text{۱}} + \text{ل}_{\text{۳}}) \text{ جم} \tfrac{\text{۱}}{\text{۲}} (\text{ل}_{\text{۱}} - \text{ل}_{\text{۳}})}{\text{جب ل}_{\text{۲}}}$$

جہاں ر زمین کا نصف قطر ہے۔ نیز ثابت کرو کہ طول بلد کا تغیر بھی ان تین عرض بلدوں کی رقوم میں معلوم کیا جاسکتا ہے۔

(۴۴)

امثلہ (۲)

۱ـ کسی کروی مثلث میں ثابت کرو کہ

۲جم ½ (ا + ب) جم ½ (ا - ب) مس ½ ج

= جب ب جم ا + جب ا جم ب

اور نیز مس ½ (ا - ا) مس ½ (ب + ب) = مس ½ (ب - ب) مس ½ (ا + ا)

۲ ـــ ثابت کرو کہ

جم ا مس ب + جم ب مس ا + مس ج = جم ا جم ب مس ا مس ب مس ج

۳ ـــ ایک کرہ کے دو نصف النہار دئے گئے ہیں۔ اِن کے درمیانی زاوئے کی تنصیف کرنے والے نصف النہار پر کے ایک دئے ہوے نقطہ سے ایک متغیر بڑا دائرہ کھینچا گیا ہے جو ان کو نقاط ن اور ق پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن اور ق کے عرض بلدوں کے مماسوں کا مجموعہ مستقل ہے۔ (R. U. I. 1898)

۴ ـــ ایک کروی مثلث میں جس کا ہر ضلع ۹۰° سے کم ہے ثابت کرو کہ کوئی زاویہ خارجہ مقابل کے اندرونی دونوں زاویوں سے بڑا ہے۔ (R. U. I. 1893)

۵ ـــ اگر کسی مثلث ا ب ج کے ضلع ا ب میں نقطہ ن لیا جائے ایسا کہ ا ن، ا ج کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ

جب ج جم ج ن = جم ا جب ب + جم ب جب (ج - ب)

(Sci. & Art, 1895)

۶ ـــ ثابت کرو کہ

جب ج / جب ج = √((۱ - جم ا جم ب جم ج) / (۱ + جم ا جم ب جم ج))   (Sci. & Art, 1898)

۷ ـــ کروی ذو اربعۃ الاضلاع ا ب ج د کے اضلاع ا ب، ب ج کو علی الترتیب ا، ب سے اور زاویہ ا ب د کو طا سے تعبیر کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ

مس طا = (جم ا جب ب - جب ا (جم ب جم ب + مم ج جب ب)) / (- مم ا جب ب + جب ا (جم ب جب ب - مم ج جم ب))

(Sci. & Art, 1898)

۸ — اگر مثلث ا ب ج اور اسکے قطبی مثلث کے متناظر زاوئے مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{قط}^{2}\,\text{ا} + \text{قط}^{2}\,\text{ب} + \text{قط}^{2}\,\text{ج} + ۲\,\text{قط ا قط ب قط ج} = ۱$$

(Sci. & Art. 1898)

۹ — اگر ا = د تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\,\text{د} = \frac{\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ب} - \text{مس}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ج}}{۱\ \text{مس}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ب}\ \text{مس}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ج}}$$

(Sci & Art. 1899)

۱۰ — اگر کروی مثلث کے دو زاویوں کا مجموعہ π سے کم ہو تو ثابت کرو کہ مقابل کے اضلاع کا مجموعہ بڑے دائرہ کے نصف محیط سے کم ہے۔

(۴۵) ۱۱ — کسی مثلث میں ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب}\,(\text{ا} + \text{ب})}{\text{جب ج}} = \frac{\text{جم ا} + \text{جم ب}}{۱ + \text{جم ج}}$$

[مارگن جنکنس (Morgan Jenkins) اسکو مثلث کا اساسی ضابطہ قرار دیتا ہے اور اس سے نیپیر اور ڈلمبر کی تمثیلات اخذ کرتا ہے۔ دیکھو

[Messenger of Mathematics, XVII p. 30

۱۲ — ل، لَ، لً، لٌ کرہ پر چار نقطے ہیں اور قوسوں ل لَ اور لً لٌ کا درمیانی زاویہ ا ہے۔ ثابت کرو کہ

جم ل لٌ جم لَ لً — جم ل لً جم لَ لٌ

= جب ل لَ جب لً لٌ جم ا (گاس)

(۴۶)

چوتھا باب

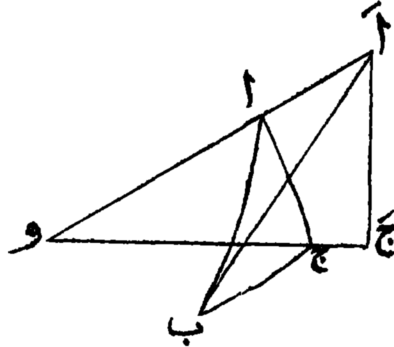
قائم الزاویہ مثلثوں کا حل

۱ ۷ — ہر کروی مثلث میں چھ عنصر ہوتے ہیں، تین ضلع اور تین زاویے؛ ان کے علاوہ کرہ کا نصف قطر ہے جس کو ایک معلومہ مستقل فرض کیا جاتا ہے کروی مثلث کے حل سے وہ عمل مراد ہے جس سے، عناصر کی کافی تعداد کی قیمتیں معلوم ہونے پر، باقی دوسرے عناصر کی قیمتیں محسوب کی جایں آگے چلکر یہ معلوم ہوگا کہ جب تین عنصروں کی قیمتیں دی گئی ہوں تو بالعموم باقی تین عنصروں کی قیمتیں معلوم کیجا سکتی ہیں۔ ہم قائم الزاویہ مثلث سے ابتدا کرتے ہیں، اس میں زاویہ قائمہ کے علاوہ دو عنصروں کا معلوم ہونا فرض کیا جائیگا۔

۲ ۷ — قائم الزاویہ مثلثوں کو حل کرنے کے لئے جو ضابطے ہیں وہ فی الحقیقت پچھلے باب کے ضابطوں کی مخصوص صورتوں کے طور پر حاصل کئے جا سکتے ہیں اگر مثلث کے زاویوں میں سے ایک کو قائمہ فرض کرلیا جائے مثلاً زاویہ ج کو۔ ان ضابطوں کو بلاواسطہ بھی آسانی کے ساتھ معلوم کیا جا سکتا ہے جیسا کہ اب ہم بتائینگے۔

۳ ۷ — **قائم الزاویہ مثلث کے ضابطے** — فرض کرو کہ ا ب ج ایک قائم الزاویہ مثلث ہے جس کا زاویہ ج قائمہ ہے۔ فرض کرو کہ کرہ کا مرکز و ہے۔

ب پر بڑے دائرے ب ج کا مماس کھینچو، یہ مماس بڑے دائرہ
کے مستوی ب و ج میں واقع ہے اور اس لئے و ج ممدودہ کو قطع کریگا
فرض کرو کہ نقطہ تقاطع جَ سے تعبیر ہوتا ہے۔ نیز ب پر بڑے دائرہ ب ا (۴۷)
کا مماس کھینچو جو اس بڑے دائرہ کے مستوی ب و ا میں واقع ہے
اور اس لئے و ا ممدودہ کو قطع کرے گا، فرض کرو کہ یہ نقطہ تقاطع اَ ہے
اَ جَ کو ملاؤ۔



اب چونکہ نصف قطر و ب دونوں مماسوں ب جَ اور ب اَ پر
عمود ہے اس لئے مستوی اَ ب جَ ہر اس مستوی پر عمود ہے جو و ب
میں سے گذرتا ہے اور اس لئے مستوی ب و ج پر عمود ہے۔ لیکن بموجب
فرض مستوی ا و ج، مستوی ب و ج پر عمود ہے۔ اس لئے خط اَ جَ
جو مستویوں ا و ج اور اَ ب جَ کا خط تقاطع ہے مستوی ب و ج
پر عمود ہے۔ اسلئے زاویے و جَ اَ اور ب جَ اَ قائمہ ہیں۔ اس طرح
شکل میں چار قائم الزاویہ مثلث اَ ب جَ، اَ و جَ، جَ و ب، اور
اَ و ب ہیں جنکے زاویے اَ ب جَ، اَ و جَ، جَ و ب اور اَ و ب
علی الترتیب دئے ہوئے کروی مثلث کے عناصر ب، ب، ا، اور ج کے
مساوی ہیں۔

اب $\frac{\text{و ب}}{\text{و اَ}} = \frac{\text{و ب}}{\text{و جَ}} \times \frac{\text{و جَ}}{\text{و اَ}}$

اس لئے جم ج = جم ا جم ب .... (۱)

نیز جب ب = ج اَ / ب اَ = ج اَ / و اَ × و اَ / ب اَ = جب بَ / جب جَ

یعنی جب ب = جب بَ جب جَ

اسی طرح جب ا = جب اَ جب جَ .... (۲)

نیز جم ب = ب جَ / ب اَ = ب جَ / و ب × و ب / ب اَ = مس اَ / مس جَ (۴۸)

یعنی مس اَ = جم ب مس جَ

اسی طرح مس بَ = جم ا مس جَ .... (۳)

نیز مس ب = جَ اَ / ب جَ = جَ اَ / و جَ × و جَ / ب جَ = مس بَ / جب اَ

یعنی مس بَ = مس ب جب اَ

اسی طرح مس اَ = مس ا جب بَ .... (۴)

ضوابط (۴) کو باہم ضرب دو تو حاصل ہوگا

مس ا مس ب = مس اَ مس بَ / جب اَ جب بَ = ۱ / جم اَ جم بَ = ۱ / جم جَ ، (۱) سے

اس لئے جم جَ = جم اَ جم بَ .... (۵)

(۲) کے دوسرے ضابطے کو (۳) کے پہلے ضابطہ سے چلیپائی ضرب دو تو

جب اَ جم ب مس جَ = مس اَ جب ا جب جَ

اسلئے جم ب = جب ا جم جَ / جم اَ = جب ا جم بَ ، (۱) سے

اس طرح جم ب = جب ا جم بَ

اسی طرح جم ا = جب ب جم اَ .... (۶)

یہ چھ ضابطے دس مساواتوں پر مشتمل ہیں، اور اس لئے ہم مثلث قائم الزاویہ کی ہر صورت کو حل کرسکتے ہیں، کیونکہ مقادیر اَ، بَ، جَ، ا، ب میں سے تین تین کے اجتماع دس ہی ہوتے ہیں اور مذکورہ بالا دس مساواتوں میں سے

ہر مساوات ان اجتماعوں میں سے کسی نہ کسی اجتماع پر مشتمل ہوگی۔ پس ان پانچ مقداروں میں سے کوئی دو مقداریں دی جائیں اور کوئی تیسری مقدار مطلوب ہو تو ان مساواتوں میں سے کسی نہ کسی مساوات سے مطلوبہ مقدار معلوم ہو جائے گی۔

اس دفعہ کی شکل کا سہ بعدی نمونہ اس طرح بنایا جا سکتا ہے[1]:۔ سخت کاغذ پر ایک دائرہ کھینچو جس کا مرکز و اور نصف قطر کرہ کے نصف قطر کے مساوی ہو۔ محیط پر نقطے ب، ج، ا، ب لو ایسے کہ زاویئے ب و ج، ج و ا اور ا و ب علی الترتیب کروی مثلث کے عناصر ا، ب، ج کے مساوی ہوں۔ مماس ب ج، ب ا کھینچو جو و ج، و ا کو علی الترتیب ج، ا پر ملیں۔ (۴۹) اب کاغذ کو و ب، ب ج، ج ا، ا ب، ب و پر قطع کرو۔ و ج اور و ا پر شکن ڈالکر اتنا موڑو کہ و ب اور و ب منطبق ہو جائیں۔

۴۷ ۔ جیسا کہ ہم بیان کر چکے ہیں مندرجہ بالا چھ ضابطے پچھلے باب کے ضابطوں سے ج کو قائمہ فرض کرکے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ چنانچہ ضابطہ (۱) دفعہ (۴۴) سے، ضابطہ (۲) دفعہ (۴۶) سے، ضابطہ (۳) دفعہ (۴۹) کی پانچویں اور چوتھی مساواتوں سے، ضابطہ (۴) دفعہ (۴۹) کی پہلی اور دوسری مساواتوں سے، ضابطہ (۵) دفعہ (۵۴) کی تیسری مساوات سے، اور ضابطہ (۶) دفعہ (۵۴) کی پہلی اور دوسری مساواتوں سے اخذ کئے جا سکتے ہیں۔

اب چونکہ یہ ضابطے پچھلے باب کے ضابطوں سے جنکا ہر صورت میں صادق ہونا ثابت کر دیا گیا ہے اخذ کئے جا سکتے ہیں اس لئے ہم یہ ثابت کرنیکے لئے نہیں ٹھہرتے کہ دفعہ ۴۳ کا ثبوت ہر صورت پر جو پیدا ہو سکتی ہے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ طالب علم شوق کے طور پر ان ترمیموں کی تحقیق کر سکتا ہے جو ضروری ہونگی جبکہ مقداروں ا، ب، ج، ا، ب میں سے ایک یا زیادہ زاویہ قائمہ کے مساوی یا اس سے بڑی ہوں۔

---

[1] حسب مشورہ پروفیسر جی۔ ایچ۔ براین (G. H. Bryan.)

۷۵۔ قائم الزاویہ مثلثوں کی چند خاصیتیں دفعہ ۷۳ کے ضابطوں سے اخذ کیجا سکتی ہیں۔

ضابطہ (۱) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جم ج کی وہی علامت ہے جو حاصل ضرب جم ا جم ب کی ہے۔ پس تمام جیوب التمام یا تو مثبت ہیں، یا صرف ایک مثبت ہے۔ اس لئے قائم الزاویہ مثلث میں یا تو تینوں ضلع ربعات سے چھوٹے ہوتے ہیں، یا صرف ایک ضلع ربع سے چھوٹا ہوتا ہے اور باقی دو ضلع ربعات سے بڑے۔

ضابطہ (۴) سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ مس ا کی وہی علامت ہے جو مس ا کی ہے، اس لئے ا اور ا میں سے دونوں یا تو $\frac{1}{2}$ π سے بڑے ہیں یا دونوں $\frac{1}{2}$ π سے چھوٹے، اس کو اس طرح بیان کیا جاتا ہے کہ ا اور ا موانس زاوئے (Angles of the same affection) ہیں۔

اسی طرح ب اور ب موانس زاوئے ہیں۔

۷۶۔ نیپیر کے قاعدے۔ دفعہ ۷۳ کے ضابطے دو قاعدوں کے تحت آتے ہیں جو ان کے موجد نیپیر سے منسوب ہیں، اس لئے ہم انکو

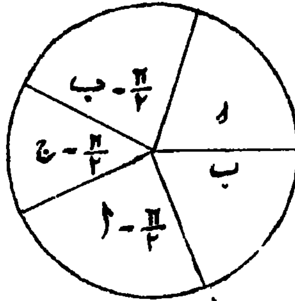
(۵۰) دائری اجزاء کے نیپیری قاعدے کہینگے۔ نیپیر لوگارتموں کا بھی موجد ہے اور اس نے متذکرہ صدر دائری اجزاء کے نیپیری قاعدوں کو ابتداً

(Mirifici logarithmorum Canonis Descriptio....Edin. 1614

میں شائع کیا تھا۔ ان قاعدوں کو اب ہم بیان کرینگے۔

زاویہ قائمہ کو چھوڑ کر مثلث کے حسب ذیل اجزاء دائری اجزاء کہلاتے ہیں۔ زاویہ قائمہ کو بنانے والے دونوں ضلع، وتر کا متمم، اور دوسرے زاویوں کے متمم۔

اس طرح دائری اجزاء کل پانچ ہیں یعنے ا، ب، $\frac{1}{2}\pi$ - ا، $\frac{1}{2}\pi$ - ج، $\frac{1}{2}\pi$ - ب اور ان کو دائرہ کے گرد اس ترتیب میں رکھا جاتا ہے جس میں وہ، مثلث کے لحاظ سے قدرتاً واقع ہیں۔



ان پانچ اجزاء میں سے کسی ایک کو منتخب کر کے اسکو **درمیانی جزو** کہہ سکتے ہیں، پھر اس کے دونوں پہلوؤں میں جو دو اجزاء ہیں انکو **متصلہ اجزاء** اور باقی دو کو **متقابل اجزاء** کہا جاتا ہے۔ مثلاً اگر $\frac{1}{2}\pi$ - ب کو درمیانی جزو قرار دیا جائے تو متصلہ اجزاء ا اور $\frac{1}{2}\pi$ - ج ہیں اور متقابل اجزاء ب اور $\frac{1}{2}\pi$ - ا۔

اس ترتیب اور طریق تسمیہ کے لحاظ سے نیپیر کے قاعدے حسب ذیل ہیں:-

درمیانی جزو کی جیب = متصل اجزاء کے مماسوں کا حاصل ضرب،

درمیانی جزو کی جیب = متقابل اجزاء کی جیوب التمام کا حاصل ضرب

۷۷ — نیپیر کے قاعدوں کی صداقت ان کے ذریعہ حاصل ہونے والے نتیجوں کا دفعات ماسبق میں حاصل شدہ نتیجوں کے ساتھ مقابلہ کرنے سے بخوبی واضح ہو سکتی ہے، چنانچہ تختہ ذیل سے یہ امر واضح ہے۔ پہلے ستون میں درمیانی اجزاء ہیں، دوسرے میں نیپیر کے قاعدوں سے حاصل شدہ نتیجے، اور تیسرے میں یہی نتیجے مگر اُن شکلوں میں جو دفعہ ۷۲ میں حاصل ہوئے ہیں اور ان کے ساتھ قوسوں میں درج کردہ عدد سے اس دفعہ کے ضابطہ کا (۵۱)

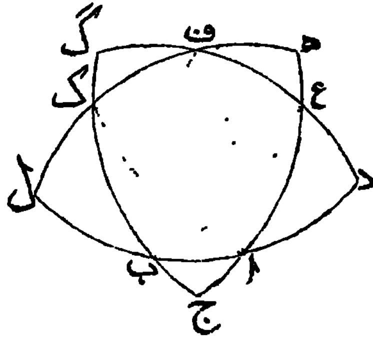
حوالہ دیا گیا ہے ۔

½π − ج	جب(½π − ج) = مس(½π − ا) مس(½π − ب) جب(½π − ج) = جم ا جم ب	جم ج = مم ا مم ب ....(۵) جم ج = جم ا جم ب ....(۱)
½π − ب	جب(½π − ب) = مس ا مس(½π − ج) جب(½π − ب) = جم ب جم(½π − ا)	جم ب = مس ا مم ج ....(۳) جم ب = جم ب جب ا ...(۶)
ا	جب ا = مس ب مس(½π − ب) جب ا = جم(½π − ا) جم(½π − ج)	جب ا = مس ب مم ب ...(۴) جب ا = جب ا جب ج ...(۲)
ب	جب ب = مس(½π − ا) مس ا جب ب = جم(½π − ب) جم(½π − ج)	جب ب = مم ا مس ا ....(۴) جب ب = جب ب جب ج (۲)
½π − ا	جب(½π − ا) = مس(½π − ج) مس ب جب(½π − ا) = جم ا جم(½π − ب)	جم ا = مس ب مم ج ...(۳) جم ا = جم ا جب ب ...(۶)

آخری چار صورتوں کی ضرورت نہ تھی کیونکہ یہ صریحاً مکرر واقع ہوئی ہیں، چنانچہ ساتویں اور آٹھویں صورتیں، پانچویں اور چھٹی صورتوں میں آگئی ہیں اور نویں اور دسویں صورتیں، تیسری اور چوتھی صورتوں میں آگئی ہیں ۔

۸ ۷ ۔ بعض اوقات یہ کہا گیا ہے کہ پچھلے دفعہ کا ہی صرف ایک طریقہ ہے جس سے نیپیر کے قاعدوں کا ثبوت ہم پہنچتا ہے لیکن یہ درست نہیں ہے کیونکہ اس طریقہ کے علاوہ خود نیپیر نے (Mirifici logarithmorum Canonis Descriptio) کے ۳۲ ویں اور ۳۵ ویں صفحات میں ثبوت کا ایک دوسرا طریقہ بتایا ہے جس کو ہم اختصاراً یہاں سمجھاتے ہیں ۔

فرض کرو کہ ا ب ج ایک کروی مثلث ہے جس کا زاویہ ج قائمہ ہے
ب کو قطب مان کر بڑا دائرہ د ع ف گ اور ا کو قطب مان کر بڑا دائرہ
ھ ف ک ل کھینچو اور مثلث ا ب ج کے ضلعوں کو اتنا خارج کرو کہ وہ
اِن بڑے دائروں سے ملیں۔ اب چونکہ د ع ف گ کا قطب ب ہے
اس لئے د اور گ پر کے زاوئے قائمہ ہیں، اور چونکہ ھ ف ک ل کا قطب
ا ہے اس لئے ھ اور ل پر کے زاوئے قائمہ ہیں۔ اسلئے مثلثات د ب ا ج
ا ع د، ع ف ھ، ف ک گ، گ ج ب ل سب کے سب قائم الزاویہ
مثلث ہیں۔ علاوہ ازیں امتحان کرنے پر یہ معلوم ہوگا کہ اگرچہ ان مثلثوں کے
عناصر مختلف ہیں لیکن ان کے دائری اجزاء ایک ہی ہیں۔ مثلاً مثلث ا ع د (۵۲
پر غور کرو، زاویہ ع ا د زاویہ ب ا ج کے مساوی ہے؛ ضلع ا د،
ا ب کا متمم ہے؛ ج اور گ پر کے زاوئے چونکہ قائمہ ہیں گ ج کا قطب
ع ہے (دفعہ ۱۳) اور اس لئے ضلع ا ع، ضلع ا ج کا متمم ہے؛ ب چونکہ
د ع کا قطب ہے اس لئے زاویہ ب ع د قائمہ ہے اور اس لئے زاویہ
ا ع د، زاویہ ب ع ج کا متمم ہے یعنے زاویہ ا ع د، ضلع ب ج
کا متمم ہے (دفعہ ۱۲)؛ اور آخر الامر اسی طرح ضلع د ع زاویہ د ب ع کے
مساوی ہے اور اس لئے زاویہ ا ب ج کا متمم ہے۔ پس اگر ہم مثلث
ا ب ج کے عناصر کو حسب معمول ا، ب، ج، ا، ب سے تعبیر کریں
تو مثلث ا ع د میں اس کا وتر $\frac{\pi}{2}$ ـ ب کے مساوی، اس کے زاوئے
ا اور $\frac{1}{2}\pi$ ـ ا کے مساوی، اور اِن زاویوں کے مقابل کے ضلع علی الترتیب
$\frac{\pi}{2}$ ـ ب اور $\frac{\pi}{2}$ ـ ج کے مساوی ہیں۔ اس طرح مثلث ا ع د کے
دائری اجزاء وہی ہیں جو ا ب ج کے ہیں۔ اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ
باقی تین قائم الزاویہ مثلثوں کے دائری اجزاء وہی ہیں جو مثلث ا ب ج کے ہیں



اب دفعہ ۷۳ کے ضابطوں میں سے کوئی دو ضابطے لو' مثلاً (۱) اور (۳)۔ تب نیپیر کے قاعدوں سے جو دس صورتیں حاصل ہوئی ہیں (دفعہ ۷۷) انکی صداقت اِن دو ضابطوں کو یکے بعد دیگرے شکل بالا میں بنے ہوئے پانچ مثلثوں پر لگانے سے واضح ہوتی ہے۔ اس طرح نیپیر کے قاعدوں پر غور کرنے کا یہ طریقہ اس امر کی طرف رہنمائی کرتا ہے کہ نیپیر کا ہر قاعدہ صرف ایک مثلث کی غیر متشابہ خاصیتوں کا بیان نہیں ہے بلکہ پانچ متحدہ مثلثوں کے متشابہ خاصیتوں کا بیان ہے۔

۷۹۔ نیپیر نے اپنی تصنیف میں جو شکل دی ہے اسکی نقل دفعہ ۷۸ کی شکل ہے لیکن ہم نے اس میں مختلف حروف استعمال کئے ہیں۔ نیپیر مختصر طور پر یہ بتاتا ہے کہ ان قاعدوں کی صداقت اس شکل کے ذریعہ آسانی کے ساتھ دیکھی جا سکتی ہے اور نیز طریقہ استقراء کے ذریعہ تمام ممکن الوقوع صورتوں پر غور کرنے سے۔ ٹی۔ ایس ڈیویس (T. S. Davies) ڈاکٹر ہٹن کی کتاب (Course of Maths) کے اڈیشن میں خود نیپیر کی رائے کی طرف توجہ دلاتا ہے اور پچھلے دفعہ کی شکل کا باقاعدہ امتحان کرکے ثبوت کی توسیع کرتا ہے۔ (۵۳)

تاہم پوری شکل کے امتحان کرنے کی ضرورت سے بچنا آسان ہے' صرف ضرورت اس بات کی ہے کہ مثلث ا ع د اور مثلث ب ا ج میں جو رشتہ ہے اس کا مشاہدہ کیا جائے۔ کیونکہ فرض کرو کہ مثلث ب ا ج کے عناصر ترتیب وار' وتر سے شروع کرکے اور زاویہ قائمہ کو چھوڑ کے

$ل_1$، $ل_2$، $ل_3$، $ل_4$، $ل_5$ سے تعبیر ہوتے ہیں، تب مثلث ا ع د کے عناصر ترتیب وار، وتر سے شروع کرکے اور زاویہ قائمہ کو چھوڑ کے، $\frac{\pi}{2} - ل_3$، $\frac{\pi}{2} - ل_4$، $\frac{\pi}{2} - ل_5$، $\frac{\pi}{2} - ل_1$ اور $ل_2$ ہیں۔ اس لئے اگر ہم مثلث ب ا ج کی تخصیص کی خاطر اس میں نئی مقداروں کا ایک جٹ $پ_1$، $پ_2$، $پ_3$، $پ_4$، $پ_5$ داخل کریں ایسا کہ $ل_1 + پ_1 = ل_2 + پ_2 = ل_5 + پ_5 = \frac{\pi}{2}$ اور $ل_3 = پ_3$، $ل_4 = پ_4$ تو دوسرے مثلث ا ع د کی تخصیص مقداروں $پ_3$، $پ_4$، $پ_5$، $پ_1$، $پ_2$ سے ہو جائے گی۔ اب چونکہ اس دوسرے مثلث سے ایک تیسرے مثلث کی تخصیص اسی طرح عمل میں آسکتی ہے اور علیٰ ہذا، اس لئے ہر قائم الزاویہ مثلث ایسے پانچ قائم الزاویہ مثلثوں کے نظام کا ایک رکن ہے جو سب کے سب مقداروں $پ_1$، $پ_2$، $پ_3$، $پ_4$، $پ_5$ سے مخصوص ہیں جبکہ ان مقداروں کو ہمیشہ ترتیب وار لیا جائے اور ہر مقدار باری باری سے پہلی جگہ پُر کرے۔

آر۔ ایل۔ ایلس (R. L. Ellis) نے اِن پانچ مثلثوں کے اس رشتہ کو معلوم کیا اور اس طرح نیپیر کے قاعدوں کی حقیقی اہمیت واضح ہوگئی۔ مسٹر ایلس کا وہ مضمون جس میں یہ تحقیقات درج ہے اس کتاب کے پہلے اڈیشن کی طباعت کے وقت تک شائع نہیں ہوا تھا لیکن بعد میں The Mathematical and other writings of Robert Leslie Ellis, Cambridge کے ۳۲۸ تا ۳۳۵ صفحات میں شائع ہو چکا ہے۔

نیپیر نے خود اپنے قاعدوں پر غور کرنے کا جو طریقہ بیان کیا تھا اس پر کسی مصنف نے اعتنا نہ کی تا آنکہ ٹی۔ ایس۔ ڈیویس نے اسکی طرف توجہ دلائی۔ ان قواعد کے متعلق جیسا کہ ہم نے دفعہ ۷۸ میں بیان کیا ہے غلط بیانات

رائج تھے۔ مثلاً اوڈ ہادس اپنی کتاب (Trigonometry) میں لکھتا ہے کہ "ان قاعدوں کا کوئی علحدہ اور بلاواسطہ ثبوت نہیں ہے"۔ اسی طرح انسائیکلوپیڈیا میٹراپالٹینا (Encyclopaedia Metropolilana) میں علم مثلث پر جو مضمون ہے اس میں ایری (Airy) لکھتا ہے کہ "یہ قاعدے صرف یہ دکھانے سے صحیح ثابت کئے گئے ہیں کہ وہ اُن مساواتوں پر صادق آتے ہیں جو ابھی ہم نے معلوم کی ہیں"[1]

۸۰ ـ نیپیر کے قاعدوں کے عملاً مفید ہونے پر بھی اختلاف رائے ہے۔ (۵۴)
مثلاً اوڈہادس کہتا ہے کہ علم ریاضی کی پوری وسعت میں شاید ہی کوئی قاعدے ایسے ہوں جو نیپیر کے قاعدوں سے زیادہ اُس مقصد کو پورا کرتے ہوں جو عام طور پر قاعدوں کی تخلیق کا باعث ہوا کرتا ہے یعنے اعمال حساب میں اختصار و سہولت (Trig.Ch.X) ۔ برخلاف اس کے ایری اپنے "علم مثلث" میں یوں تنقید کرتا ہے (انسائیکلوپیڈیا میٹراپالٹینا) ڈلمبر کی رائے میں (اور اس کے علاوہ بلحاظ تجربہ کسی کی رائے زیادہ وزنی نہیں ہوسکتی) اِن قاعدوں کو اس طرح کی بے ربط شکل میں صرف وہی شخص بہت عمدگی سے یاد رکھ سکتا ہے جو عملاً محاسب ہو" دیکھو ڈلمبر کی کتاب (علم ہئیت) جلد اول صفحہ ۲۰۵ ـ پروفیسر ڈی مارگن نیپیر کے قاعدوں کا سخت مخالف ہے اور کہتا ہے کہ "حفظ کرنے میں مدد دینے والے چند ضابطے ہیں جنکو عام طور پر نیپیر کے قاعدے کہا جاتا ہے اور جو بالعموم سمجھائے جاتے ہیں۔ ہم ان کو بیان نہیں کرتے کہ ہمیں اس بات کا یقین ہے کہ ان سے حافظہ کو مدد پہنچنے کی بجائے اس میں انتشار پیدا ہوتا ہے" (علم مثلث کروی دفعہ ۱)

۸۱ ـ **قائم الزاویہ مثلثوں کا حل** ـ اب ہم دفعہ ۷۳ کے ضابطوں کو

[1] نیپیر کے قاعدوں پر پروفیسر E. O. Lovett نے (Bulletin of the American math. Society second series, IV, 1898 P 252.) میں بحث کی ہے۔ نیز دیکھو O. Pund, Ueber Substitutiousgruppen in der Spharischen Trigonometrie, Mitteilungen der math. Gesell. in Hamburg, III 1897-8. P. 290.

قائم الزاویہ مثلثوں کے حل کرنے میں استعمال کرینگے۔ہم یہ مان لینگے کہ دی ہوئی مقداریں اُن حدود کے اندر ہیں جو دفعات ۲۲ اور ۲۳ میں بیان ہو چکی ہیں یعنے دیا ہوا ضلع بڑے دائرہ کے نصف محیط سے اور دیا ہوا زاویہ دو قائمہ زاویوں سے کم ہونے چاہئیں ۔

اِن ضابطوں کی مدد سے عددی حسابات لگانے میں لوکارتموں سے استفادہ کیا جائے گا۔جس طالب علم کو مستوی مثلثوں کے حل کرنے کی مشق ہے وہ لوکارتمی اور مثلثی جدولوں کے استعمال سے بخوبی واقف ہوگا۔ دوسرے طلباء مصنف کی Plane Trig کا مطالعہ کریں جس میں پورا ایک باب اس مضمون کے لئے وقف ہے ۔ صرف ایک ہدایت کا یہاں دُہرانا مناسب معلوم ہوتا ہے اور وہ یہ کہ چھوٹے زاویوں کو انکی جیوب التمام سے یا ۹۰° کے قریب زاویوں کو اِنکی جیوب سے محسوب کرنے سے احتراز کیا جائے کیونکہ متناظر جدولی لوکارتم بہت سُست رفتار سے متغیر ہوتے ہیں اس قسم کے زاویوں کو ان کے مماسوں سے محسوب کرنا قابل ترجیح ہے۔

قائم الزاویہ مثلثوں کے حل میں چھ صورتیں پیدا ہوتی ہیں ۔

۸۲ ـ صورت اول ـ جبکہ وتر ج اور زاویہ ا دئے جائیں ـ

دفعہ ۷۳ کے ضابطوں (۳)، (۵)، اور (۲) سے

مس ب = مس ج جم ا
مم ب = جم ج مس ا .... (۷) (۵۵)
جب د = جب ج جب ا

اس طرح ب اور ب بغیر کسی ابہام کے فوراً معلوم ہو جاتے ہیں اور چونکہ د اور ا موانس زاوئے ہونے چاہئیں اس لئے د بھی بغیر ابہام کے معلوم ہوتا ہے ۔

مثلث کو حل کرنے کے لئے جو ضابطے اوپر درج ہیں اُن سے ظاہر ہے کہ مثلث ہمیشہ ممکن ہے ۔

اگر ج اور ا دونوں قائمہ زاوئے ہوں تو ا قائمہ ہوگا، اور ب اور ا ب غیر معیّن ہونگے۔

اگر ا، ۹۰° کے قریب ہو اور یہ اسوقت ہوگا جبکہ ا اور ج دونوں ۹۰° کے قریب ہوں تو پہلے ب اور ب کی قیمتیں معلوم کرلینی چاہئیں اور پھر ا ضوابط ذیل میں سے کسی سے معلوم کیا جا سکتا ہے :-

مس ا = جب ب مس ا، مس ا = مس ج جم ب

۸۳ ـ صورت دوم ـ جبکہ ضلع ب اور زاویہ متصلہ ا دئے جائیں

دفعہ ۷۳ کے ضابطوں (۳)، (۴) اور (۶) کی رو سے

مس ج = مس ب / جم ا
مس ا = مس ا جب ب .... (۸)
جم ب = جم ب جب ا

اس لئے ج، ا، ب بغیر ابہام کے معلوم ہوتے ہیں اور مثلث ہمیشہ ممکن ہے۔

اگر ب چھوٹا ہو اور یہ اسوقت ہوگا جبکہ ا، ۹۰° کے بالکل قریب ہو اور ب، صفر یا ۱۸۰° کے بالکل قریب ہو تو پہلے ا معلوم کر کے پھر ضابطہ

مس ب = مس ب / مس ا

کا استعمال کیا جاتا ہے۔

۸۴ ـ صورت سوم ـ جبکہ دو ضلع ا اور ب دئے جائیں۔

دفعہ ۷۳ کے ضابطوں (۱) اور (۴) کی رو سے

جم ج = جم ا جم ب
مم ا = مم ا جب ب .... (۹)
مم ب = مم ب جب ا

اس لئے ج ، ا ، ب بغیر ابہام کے معلوم ہوتے ہیں اور مثلث (۵۶)
ہمیشہ ممکن ہے ۔

اگر ج بہت چھوٹا ہو اور یہ اسوقت ہوگا جبکہ د اور ب دونوں صفر ہوں یا ۱۸۰° کے بالکل قریب ہوں تو پہلے ا اور ب معلوم کرکے ضابطوں

$$\text{مس ج} = \frac{\text{مس د}}{\text{جم ب}} \text{ ، } \text{مس ج} = \frac{\text{مس ب}}{\text{جم ا}}$$

میں سے کسی ایک کا استعمال کیا جاتا ہے ۔

۸۵ ۔ صورت چہارم ۔ جبکہ وتر ج اور ضلع د دئے جائیں ۔

دفعہ ۳۷ کے ضابطوں (۱) اور (۳) سے

$$\left.\begin{aligned} \text{جم ب} &= \frac{\text{جم ج}}{\text{جم د}} \\ \text{جم ب} &= \frac{\text{مس د}}{\text{مس ج}} \\ \text{جب ا} &= \frac{\text{جب د}}{\text{جب ج}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

ب ، ب ، ا بغیر ابہام کے معلوم ہوتے ہیں کیونکہ ا اور د ہم جنس زاوئے ہونے چاہئیں ۔ ان ضابطوں سے ظاہر ہے کہ مفروضات کا کسی نہ کسی قید کی پابندی کرنا ضروری ہے تاکہ مثلث کے امکان کا یقین ہو۔ فی الحقیقت ج کو د اور ۱۸۰° ۔ د کے درمیان واقع ہونا چاہئے تاکہ جم ب ، جم ب اور جب ا کی جو قیمتیں معلوم ہوں وہ عدداً ایک سے تجاوز نہ ہو سکیں ۔

اگر ج اور د قائمہ زاوئے ہوں تو ا قائمہ ہوگا ، اور ب اور ب غیر معین ہونگے ۔

۸۶ ۔ مثلث کو مندرجہ بالا تین مساواتوں کے ذریعہ حل کرنے کے لئے چھ لوگارتموں کا دیکھ لینا ضروری ہے ۔ لیکن اگر دوسرے ضابطوں

$$\left.\begin{aligned}
&\text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ب} = \pm\sqrt{\text{مس}\ \tfrac{1}{2}(\text{ج}+\text{د})\ \text{مس}\ \tfrac{1}{2}(\text{ج}-\text{د})} \\
&\text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ب} = \pm\sqrt{\frac{\text{جب}\,(\text{ج}-\text{د})}{\text{جب}\,(\text{ج}+\text{د})}} \\
&\text{مس}\left(45^\circ + \tfrac{1}{2}\ \text{ا}\right) = \pm\,\frac{\text{مس}\ \tfrac{1}{2}(\text{ج}+\text{د})}{\text{مس}\ \tfrac{1}{2}(\text{ج}-\text{د})}
\end{aligned}\right\}\ \dots\dots(۱۱)$$

کو استعمال کیا جائے جو متذکرۂ بالا ضابطوں سے فوراً اخذ کئے جا سکتے ہیں تو صرف چار لوکارتموں کا دیکھ لینا کافی ہوتا ہے۔ علاوہ ازیں یہ ضابطے اسوقت بھی استعمال ہوتے ہیں جبکہ ب یا جب بہت چھوٹا ہو یا ا، ۹۰° کے قریب ہو۔ پہلے دو ضابطو میں جذر المربعوں کی علامتیں مثبت رکھی گئی ہیں کیونکہ ½ ب اور ½ جب، ۹۰° سے تجاوز نہیں ہو سکتے۔ تیسرے ضابطہ میں علامت مثبت یا منفی ہوگی بموجب اس کے کہ د، ۹۰° سے چھوٹا یا بڑا ہو کیونکہ اگر د، ۹۰° سے چھوٹا ہے تو ا بھی ۹۰° سے چھوٹا ہے اور اس لئے ۴۵° + ½ ا بھی ۹۰° سے چھوٹا ہے۔

۸۷ ۔ صورت پنجم ۔ جبکہ دو زاوئے ا اور ب دئے جائیں۔

دفعہ ۷۳ کے ضابطوں (۵) اور (۶) سے

$$\left.\begin{aligned}
&\text{جم ج} = \text{جم ا جم ب} \\
&\text{جم د} = \frac{\text{جم ا}}{\text{جب ب}} \\
&\text{جم ب} = \frac{\text{جم ب}}{\text{جب ا}}
\end{aligned}\right\}\ \dots\dots\dots\dots(۱۲)$$

پس ج، د، ب بغیر ابہام کے معلوم ہوتے ہیں۔ لیکن مفروضات پر چند قیود عائد ہونگے تاکہ مثلث کے امکان کا یقین ہو سکے۔ جم ا اور جم ب لازماً ایک سے چھوٹے ہونے چاہئیں اس لئے یہ ضروری ہے کہ

جم ا عدداً جب ب سے چھوٹا ہو اور جم ب عدداً جب ا سے چھوٹا۔ فی الحقیقت اِن دونوں میں سے کسی ایک شرط کے پورے ہونے سے دوسری شرط بھی پوری ہوتی ہے کیونکہ

جب^۲ ب - جم^۲ ا = جب^۲ ا - جم^۲ ب

اول فرض کرو کہ ا' ۹۰° سے چھوٹا ہے تو جم ب کا جم (۹۰° - ا) سے عدداً چھوٹا ہونا ضروری ہے اور اس لئے ب' ۹۰° - ا اور ۹۰° + ا کے درمیان واقع ہونا چاہئے۔ ثانیاً فرض کرو کہ ا' ۹۰° سے بڑا ہے تو جم ب کا جم (ا - ۹۰°) سے عدداً چھوٹا ہونا ضروری ہے اور اسلئے ب' ا - ۹۰° اور ۱۸۰° - (ا - ۹۰°) کے درمیان یعنے ا - ۹۰° اور ۲۷۰° - ا کے درمیان واقع ہونا چاہئے۔

اگر یہ معلوم ہو جائے کہ تین ضلعوں میں سے ایک ضلع اسقدر چھوٹا ہے کہ اسکی جیب التمام سے اِس کو صحیح طور پر محسوب نہیں کیا جا سکتا تو اوپر کے ضابطوں کی حسب ذیل ترمیمات (جنمیں صرف چار لوکارتم درکار ہیں) استعمال کی جائیں:-

مس ½ ج = + √(جب (ا + ب - ۹۰°) / جم (ا - ب))

مس ½ ا = + √(مس ½ (ا + ب - ۹۰°) مم ½ (ب - ا + ۹۰°)) ... (۱۳)

مس ½ ب = + √(مس ½ (ا + ب - ۹۰°) مس ½ (ب - ا + ۹۰°))

۸۸ - صورت ششم - جبکہ ایک ضلع ا اور اسکے مقابل کا زاویہ ا دئے جائیں۔ (۵۸)

دفعہ ۳۷ کے ضابطوں (۲)، (۴)، اور (۶) سے

جب ج = جب ر / جب ا

جب ب = مس ر مم ا　　. . . . . (۱۴)

جب ب = جم ا / جم ر

اب صفر اور ۱۸۰° کے درمیان صرف ایک زاویہ ہوتا ہے جو دی ہوئی جیب التمام یا دیا ہوا مماس رکھتا ہو لیکن بالعموم دو زاوئے ہوتے ہیں جو دی ہوئی جیب رکھتے ہوں۔ اس لئے کسی کروی مثلث کا کوئی عنصر یگانہ طور پر معلوم ہوگا جب اس کا مماس یا جیب التمام معلوم ہو لیکن مبہم طور پر جب اسکی جیب معلوم ہو۔ زیر بحث مثال میں مطلوبہ تین عنصروں کو انکی جیوب سے معلوم کرنا درپیش ہے اور اس لئے یہاں سہ گونہ ابہام ہے۔ اس سے یہ فرض کیا جا سکتا ہے کہ چھ مختلف مثلث ہیں جو مفروضات کو پورا کرتے ہیں لیکن ذرا غور کرنے سے یہ معلوم ہو جائے گا کہ فی الواقعی صرف دو مثلث ہیں۔ کیونکہ جب ر کو جب ا سے چھوٹا ہونا چاہیئے ورنہ جب ج کی حاصل شدہ قیمت ناقابل قبول ہوگی۔ جب یہ شرط پوری ہو تو ج کے لئے دو قیمتیں قابل قبول ہیں؛ انمیں سے ہر قیمت کے جواب میں عام طور پر ب کی صرف ایک قیمت قابل قبول ہوگی کیونکہ جم ج = جم ا جم ب جس سے ب کا تعین اس کی جیب التمام سے ہوتا ہے اور اس لئے ب کی صرف ایک قیمت حاصل ہوتی ہے۔ اور اسی طرح ج کی ہر قیمت کے جواب میں ب کی صرف ایک قیمت قابل قبول ہوگی کیونکہ رشتہ جم ج = مم ا مم ب سے ب کا تعین اسکے مماس التمام سے ہوتا ہے اور اس لئے اس کی صرف ایک قیمت حاصل ہوتی ہے۔

پس اگر ایک مثلث موجود ہو جس میں دئے ہوئے اجزا شامل ہوتے ہیں تو عام طور پر دو اور صرف دو مثلث ہونگے جنمیں دئے ہوئے اجزاء

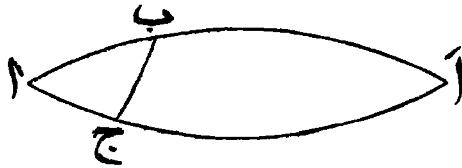
شامل ہونگے۔ اوپر کے جملوں میں ہم نے جملہ 'عام طور پر' استعمال کیا ہے، اس کی وجہ یہ ہے کہ اگر ا = ! تو صرف ایک مثلث حاصل ہوگا سوائے اس صورت کے جبکہ ا اور ! دونوں قائمہ زاوئے ہوں اور اس صورت میں ب اور ب غیر معین ہو جائیں گے۔

شکل سے یہ دیکھنا آسان ہے کہ بالعموم ابہام کا پیدا ہونا ضروری ہے۔

فرض کرو کہ ب اج ایک مثلث ہے جو دی ہوئی شرطوں کو پورا کرتا ہے۔ اب اور اج کو اتنا خارج کرو کہ وہ مکرر اَ پر ملیں تب مثلث اَب ج بھی دی ہوئی شرطوں کو پورا کرے گا کیونکہ اس میں ج پر کا زاویہ قائمہ ہے، ب ج دیا ہوا ضلع ہے اور ! = اَ جو دیا ہوا زاویہ ہے (۵۹)

اگر ا = ! تو حل معلوم کرنے کے ضابطوں سے یہ ظاہر ہے کہ ج، ب، اور ب قائمہ ہیں۔ اس صورت میں اَ ب ج کا قطب ہے اور مثلث اَب ج، مثلث اب ج کے متشاکلاً مساوی ہے۔

اگر ا قائمہ ہو جس کی وجہ سے ! کا بھی قائمہ ہونا ضروری ہے تو ب، اج کا قطب ہے۔ تب ب اور ب مساوی ہیں لیکن انکی کوئی قیمت ہو سکتی ہے۔



مفروضات پر چند قیود عائد ہونگے تاکہ مثلث کے وجود کا تعین ہو سکے۔ دفعہ ۵۷ کی رو سے ! اور ا کو موانس زاوئے ہونا چاہئے، اور یہ ضروری ہے کہ جب ا عدداً جب ! سے چھوٹا ہو تاکہ حل معلوم کرنے کے ضابطوں سے جیوب ب کی حاصل شدہ قیمتیں -۱ اور +۱ کے

درمیان واقع ہوں۔ پس ا کو ا سے چھوٹا ہونا چاہئے اگر دونوں زاوئے حادہ ہوں لیکن اس سے بڑا اگر دونوں منفرجہ ہوں۔

اگر مطلوبہ اجزاء ایسے ہوں کہ اونکی جیوب سے اونکو کافی صحت کے ساتھ معلوم نہیں کیا جا سکتا تو حسب ذیل ضابطے جو حل کے ضابطوں سے ماخوذ ہیں استعمال کئے جائیں :-

$$\left.\begin{aligned}
\text{مس}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\text{ج}) &= \pm\sqrt{\text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ا})\;\text{مم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ا})}\\
\text{مس}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\text{ب}) &= \pm\sqrt{\frac{\text{جب}(\text{ا}-\text{ا})}{\text{جب}(\text{ا}+\text{ا})}}\\
\text{مس}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\text{ب}) &= \pm\sqrt{\text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ا})\;\text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ا})}
\end{aligned}\right\}\cdots(15)$$

ان تکمیلی ضابطوں کو اور صورت چہارم کے تکمیلی ضابطوں کو Cagnoli نے معلوم کیا تھا[ه]

۸۹ ۔ نیپیر کی تمثیلات کا استعمال ۔ کرنل کلارک اپنی تصنیف علم تقسیم الارض (Geodesy) کے صفحہ ۴۳ میں یہ بیان کرتا ہے کہ تین کی صورتوں میں قائم الزاویہ مثلث کے حل کو نیپیر کی تمثیلات سے استفادہ کرکے بہت مختصر کیا جا سکتا ہے۔ (۶۰)

پہلے فرض کرو کہ ضلع ا اور ب دئے گئے ہیں۔ ۹۰° - ا کی بجائے و لکھو تو پہلی دو تمثیلوں سے

$$\frac{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})} = \text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب}) = \frac{1+\text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{ب}-\text{و})}{1-\text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{ب}-\text{و})}\cdots(16)$$

ه (Trigonometria) دفعات ۱۰۳۰ تا ۱۰۳۵ -

$$\frac{\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})} = \text{مس}\,\frac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب}) = \frac{1-\text{مس}\,\frac{1}{2}(\text{ب}+\text{و})}{1+\text{مس}\,\frac{1}{2}(\text{ب}+\text{و})} \ldots (17)$$

جن سے

$$\text{مس}\,\frac{1}{2}(\text{ب}-\text{و}) = \text{مس}\,\frac{1}{2}\,\text{ا}\;\text{مس}\,\frac{1}{2}\,\text{ب} \ldots\ldots (18)$$

$$\text{مس}\,\frac{1}{2}(\text{ب}+\text{و}) = \text{مم}\,\frac{1}{2}\,\text{ا}\;\text{مس}\,\frac{1}{2}\,\text{ب} \ldots\ldots (19)$$

جب ان ضابطوں کو ب اور و معلوم کرنے میں استعمال کیا جاتا ہے تو چار کی بجائے صرف دو لوکارتم دیکھنے کی ضرورت ہوتی ہے اگر ا اور ب دئے گئے ہوں تو ان ضابطوں سے ا اور ب بھی آسانی سے حاصل ہوتے ہیں کیونکہ ان ضابطوں پر اعمال ضرب و تقسیم سے فی الحقیقت وہی ضابطے ملتے ہیں جو صورت پنجم کے تحت دئے گئے ہیں۔

پھر اگر ضلع ب اور زاویہ متصلہ ا دئے جائیں تو ہم نیپیر کی تیسری اور چوتھی تمثیلات استعمال کرتے ہیں جو اس صورت میں یہ شکل

$$\text{مس}\,\frac{1}{2}(\text{ج}+\text{ا}) = \text{مس}\,\frac{1}{2}\,\text{ب}\;\text{مم}\,\frac{1}{2}\,\text{و} \ldots\ldots (20)$$

$$\text{مس}\,\frac{1}{2}(\text{ج}-\text{ا}) = \text{مس}\,\frac{1}{2}\,\text{ب}\;\text{مس}\,\frac{1}{2}\,\text{و} \ldots\ldots (21)$$

اختیار کرتی ہیں جس میں بائیں طرف کے اجزائے ضربی تعداد میں صرف دو ہیں۔

۹۰ — اب ہم قائم الزاویہ کروی مثلثوں کو حل کرنے کی چند مثالیں دیتے ہیں یہاں اور آئندہ باب میں اگرچہ ہم نے سات ہندسی لوکارتموں کا استعمال کیا ہے لیکن یہ یاد رہے کہ اکثر و بیشتر عملی مقاصد میں چار یا پانچ ہندسی لوکارتم استعمال کرنا بالکل کافی ہے۔ مفروضہ عناصر کی پیمائش جس درجہ صحت تک حاصل کی گئی ہو اس سے زیادہ صحت کا درجہ بقیہ عناصر کے محسوب کرنے میں استعمال کرنا بے سود ہے۔ مثلاً جہاز رانی میں جس میں فلکی یا ارضی مشاہدات کی طرح زاویوں کی اتنی صحیح پیمائش عمل میں نہیں آسکتی تضیع اوقات ہوگی اگر اعمال حساب میں زیادہ ہندسی لوکارتم استعمال کئے جائیں۔ اس میں شک نہیں کہ کسی چھوٹے زاویے کو اسکی جیب التام سے یا ایسے زاویہ کو جو قائمہ زاویے کے قریب ہو

(۲۱)

اسکی جیب سے معلوم کرتے وقت تین یا چار ہندسی لوگارثم کا استعمال مشکلات سے خالی نہیں تاہم ایسی صورتوں میں وہ تکمیلی ضابطے استعمال کیے جاسکتے ہیں جو ایسی صورتوں کے لئے حاصل کئے گئے ہیں، ان سے مطلوبہ درجہ تک تقرب حاصل ہو سکتا ہے۔

۹۱ — مثال (۱) اگر

ا = ۳۷° ۴۸′ ۱۲″ ، ب = ۵۹° ۴۴′ ۱۶″ ، ج = ۹۰°

تو مثلث کو حل کرو۔

ج معلوم کرنے کے لئے،

جم ج = جم ا جم ب

اور　ل جم ۳۷° ۴۸′ ۱۲″ = ۹٫۸۹۷۶۹۲۷

ل جم ۵۹° ۴۴′ ۱۶″ = ۹٫۷۰۲۳۹۴۵

∴　ل جم ج + ۱۰ = ۱۹٫۶۰۰۰۸۷۲

∴　ج = ۶۶° ۳۲′ ۶″

ا اور ب معلوم کرنے کے لئے،

مس ½ (ب − و) = مس ½ ا مس ½ ب

مس ½ (ب + و) = مم ½ ا مس ½ ب

جہاں و = ۹۰° − ا ،

ل مس ½ ب = ل مس ۲۹° ۵۲′ ۸″ = ۹٫۷۵۹۱۴۱۲

ل مس ½ ا = ل مس ۱۸° ۵۴′ ۶″ = ۹٫۵۳۴۵۴۵۲

∴　ل مس ½ (ب + و) = ۱۰٫۲۲۴۵۹۶۰

ل مس ½ (ب − و) = ۹٫۲۹۳۶۸۶۴

∴　½ (ب + و) = ۵۹° ۱۱′ ۴۵″ ، ½ (ب − و) = ۱۱° ۷′ ۳۰″

∴　ب = ۷۰° ۱۹′ ۱۵″ ، و = ۴۸° ۴′ ۱۵″ ، ا = ۴۱° ۵۵′ ۴۵″

۹۲ ـ مثال (۲) مفروضات

ا = ۵۵° ۳۲′ ۴۵″ ، ج = ۹۰° ، ج = ۹۸° ۱۴′ ۲۴″

ا معلوم کرنے کے لئے ،

جب ا = جب ج جب ا

ل جب ۹۸° ۱۴′ ۲۴″ = ۹٫۹۹۵۴۹۳۲

ل جب ۵۵° ۳۲′ ۴۵″ = ۹٫۹۱۶۲۳۲۳

∴ ل جب ا + ۱۰ = ۱۹٫۹۱۱۷۲۵۵

∴ ا = ۵۴° ۴۱′ ۳۵″

ب معلوم کرنے کے لئے ،

مم ب = جم ج مس ا

یہاں جم ج منفی ہے اور اس لئے مم ب منفی ہوگا اور ب زاویہ قائمہ سے بڑا ہوگا ـ جم ج کی عددی قیمت وہی ہے جو جم ۸۱° ۴۵′ ۳۶″ کی ہے ـ

ل جم ۸۱° ۴۵′ ۳۶″ = ۹٫۱۵۶۳۰۶۵ (۶۲)

ل مس ۵۵° ۳۲′ ۴۵″ = ۱۰٫۱۶۳۶۱۰۲

∴ ل مم (۱۸۰° ـ ب) + ۱۰ = ۱۹٫۳۱۹۹۱۶۷

∴ ۱۸۰ ـ ب = ۷۸° ۱۲′ ۴″

∴ ب = ۱۰۱° ۴۷′ ۵۶″

ب معلوم کرنے کے لئے ،

مس ب = مس ج جم ا

یہاں مس ج منفی ہے اور اس لئے مس ب منفی ہوگا اور ب ربع سے بڑا ہوگا ـ

ل مس ۸۱° ۴۵′ ۳۶″ = ۱۰٫۸۳۹۱۸۶۷

ل جم ۵۵° ۳۲′ ۴۵″ = ۹٫۷۵۲۶۲۲۱

∴ ل مس(۱۸۰° - ب) + ۱۰ = ۲۰٫۵۹۱۸۰۸۸

∴ ۱۸۰° - ب = ۷۵° ۳۸′ ۳۲″

یعنے ب = ۱۰۴° ۲۱′ ۲۸″

۹۳ — مثال (۳) مفروضات

ا = ۴۶° ۱۵′ ۲۵″ ، ج = ۹۰° ، د = ۴۲° ۱۸′ ۴۵″

ج معلوم کرنے کے لئے

جب ج = جب د / جب ا

ل جب ج = ۱۰ + ل جب د - ل جب ا

۱۰ + ل جب ۴۲° ۱۸′ ۴۵″ = ۱۹٫۸۲۸۱۲۷۲

ل جب ۴۶° ۱۵′ ۲۵″ = ۹٫۸۵۸۸۰۶۵

∴ ل جب ج = ۹٫۹۶۹۳۲۰۷

∴ ج = ۶۸° ۴۲′ ۵۹″ یا ۱۱۱° ۱۷′ ۱″

ب معلوم کرنے کے لئے

جب ب = مس د مم ا

ل مس ۴۲° ۱۸′ ۴۵″ = ۹٫۹۵۹۱۹۸۳

ل مم ۴۶° ۱۵′ ۲۵″ = ۹٫۹۸۰۹۳۸۹

∴ ل جب ب + ۱۰ = ۱۹٫۹۴۰۱۳۷۲

∴ ب = ۶۰° ۳۶′ ۱۰″ یا ۱۱۹° ۲۳′ ۵۰″

ح معلوم کرنے کے لئے

$$جب\ ب = \frac{جم\ ا}{جم\ د}$$

ل جب ب = ۱۰ + ل جم ا − ل جم د

۱۰ + ل جم ۴۶° ۱۵′ ۲۵″ = ۱۹٫۸۳۹۷۴۵۴

ل جم ۴۲° ۱۸′ ۴۵″ = ۹٫۸۶۸۹۲۸۹

∴ ل جب ب = ۹٫۹۷۰۸۱۶۵

∴ ب = ۶۹° ۱۳′ ۴۷″ یا ۱۱۰° ۴۶′ ۱۳″

۹۴— مثال ۴۔ (ریڈ، دفعہ ۳۲ نمبر ۱۲) (۶۳)

مفروضات ج = ۳۷° ۴۰′ ۲۰″، د = ۳۷° ۴۰′ ۱۲″، ج = ۹۰°

یہاں $\frac{1}{2}$(ج + د) = ۳۷° ۴۰′ ۱۶″ ، $\frac{1}{2}$(ج − د) = ۰° ۰′ ۴″

ل س $\frac{1}{2}$(ج + د) = ۹٫۸۸۷۶۶ ، ل جب(ج − د) = ۵٫۵۸۸۶۶

ل س $\frac{1}{2}$(ج − د) = ۵٫۲۰۷۶۳ ، ل جب(ج + د) = ۹٫۹۸۵۶۲

∴ ل س² $\frac{1}{2}$ ب = ۵٫۱۷۵۲۹ ، ل س² $\frac{1}{2}$ ب = ۵٫۶۰۳۰۳

ل س²(۴۵° − $\frac{1}{2}$ ا) = ۵٫۳۹۹۹۷ ، ل س $\frac{1}{2}$ ب = ۷٫۸۰۱۵۲

∴ ل س $\frac{1}{2}$ ب = ۷٫۵۸۷۶۵ ، $\frac{1}{2}$ ب = ۰° ۲۱′ ۴۶″

ل س(۴۵° − $\frac{1}{2}$ ا) = ۷٫۶۹۹۹۹ ، ب = ۰° ۴۳′ ۳۲″

∴ $\frac{1}{2}$ ب = ۰° ۱۳′ ۱۸″ ، ب = ۰° ۲۶′ ۳۶″

۴۵° − $\frac{1}{2}$ ا = ۰° ۱۷′ ۱۴″ ، ا = ۸۹° ۲۵′ ۳۲″

۹۵— مثال ۵۔ (ریڈ، دفعہ ۳۲ نمبر ۶)

مفروضات د = ۳۴° ۶′ ۱۳″ ، ا = ۳۴° ۷′ ۴۱″ ، ج = ۹۰°

یہاں ا − د = ۰° ۱′ ۲۸″ ، ا + د = ۶۸° ۱۳′ ۵۴″

$\frac{1}{2}$(ا − د) = ۰° ۰′ ۴۴″ ، $\frac{1}{2}$(ا + د) = ۳۴° ۶′ ۵۷″

ل س $\frac{1}{2}$(ا − د) = ۶٫۳۲۹۰۳ ، ل جب(ا − د) = ۶٫۶۳۰۰۶

ل مس ½ (ا + د) = ۹٫۸۳۰۸۸ ‏ ل جب (ا + د) = ۹٫۹۶۷۸۸

∴ ل مس² (۴۵° - ½ ج) = ۶٫۴۹۸۱۵ ‏ ل مس² (۴۵° - ½ ب) = ۶٫۶۶۲۱۸

ل مس² (۴۵° - ½ ب) = ۶٫۱۵۹۹۱ ‏ ل مس (۴۵° - ½ ب) = ۸٫۳۳۱۰۹

∴ ل مس (۴۵° - ½ ج) = ۸٫۲۴۹۰۸ ‏ ۴۵° - ½ ب = ۱° ۱۳′ ۴۰″

ل مس (۴۵° - ½ ب) = ۸٫۰۷۹۹۶ ‏ ب = ۸۷° ۳۲′ ۴۰٫۰″

∴ ۴۵° - ½ ج = ۱° ۱′ ۰″ ‏ ج = ۸۷° ۵۸′ ۰″

۴۵° - ½ ب = ۰° ۴۱′ ۱۹″ ‏ ب = ۸۸° ۳۷′ ۲۲″

امثلہ نمبری (۳)

مثلث ا ب ج کے لئے جس میں زاویہ ج قائمہ ہے ان روابط کو ثابت کرو جو امثلہ ۱ تا ۵ میں دئے گئے ہیں۔

۱۔ جب² ½ ج = جب² ½ ا جم² ½ ب + جم² ½ د جب² ½ ب

۲۔ مس ½ (ج + د) مس ½ (ج - د) = مس² ½ ب

۳۔ جب (ج - ب) = مس² ½ ا جب (ج + ب)

۴۔ جب ا مس ½ ا - جب ب مس ½ ب = جب (ا - ب)

۵۔ جب (ج - ا) = جب ب جم ا مس ½ ب

جب (ج - ا) = مس ب جم ج مس ½ ب

۶۔ اگر ا ب ج ایک کروی مثلث ہو جس کا زاویہ ج قائمہ ہے اور جم ا = جم² ا تو ثابت کرو کہ اگر ا قائمہ نہ ہو تو ب + ج = ½ π یا ³⁄₂ π بموجب اسکے کہ ب اور ج دونوں ½ π سے چھوٹے یا بڑے ہوں۔ (۶۴)

۷۔ اگر مثلث کے زاویہ قائمہ سے دو قوسیں عہ اور بہ کھینچی جائیں جو علی الترتیب وتر پر عمود اور راس کی تنصیف کرتی ہوں تو ثابت کرو کہ

جب² ½ ج (۱ + جب² عہ) = جب² بہ

۸ – اگر ایک مثلث میں زاویہ ج قائمہ ہو اور اب کا نقطہ وسطی د ہو تو ثابت کرو کہ

۴ جم² ½ ج جب² ا ج د = جب² ا + جب² ب

۹ – ایک قائم الزاویہ مثلث میں اگر ج سے وتر اب پر عمود وار ایک قوس کھینچی جائے اور اس قوس کا طول جہ ہو تو ثابت کرو کہ

مم جہ = √(مم² ا + مم² ب)

۱۰ – و ا ا ایک قائم الزاویہ مثلث ہے۔ زاویہ ا قائمہ ہے اور ا حادہ – ایک بڑے دائرہ کی قوس ا ا۱ و ا پر عمود وار کھینچی گئی ہے اور پھر قوس ا۱ ا۲ و ا۱ پر عمود وار کھینچی گئی ہے اور علی ہذا القیاس – ثابت کرو کہ ا ن ا ن+۱ معدوم ہوتا ہے جبکہ ن لاتناہی ہو جائے – نیز جم ا ا۱ جم ا۱ ا۲ جم ا۲ ا۳ .... لاتناہی تک کی قیمت معلوم کرو –

۱۱ – اب ج ایک قائم الزاویہ کروی مثلث ہے جس میں ا قائمہ زاویہ نہیں ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ا = ا تو ج اور ب ربعات ہیں –

۱۲ – کسی مثلث میں اگر ج سے اب پر عمود وار ایک قوس کھینچی جائے اور اس قوس کا طول جہ ہو تو ثابت کرو کہ

جم جہ = قم ج (جم² ا + جم² ب – ۲ جم ا جم ب جم ج)^½

۱۳ – کرہ کا ایک بڑا دائرہ اب ج ہے۔ ا' ب' ج' بڑے دائروں کی قوسیں ہیں جو اب ج کے ضلعوں پر علی القوائم کھینچی گئی ہیں اور جن کو مثبت شمار لیا گیا ہے اگر وہ اب ج کے ایک ہی جانب واقع ہوں – ثابت کرو کہ ا' ب' ج' ایک بڑے دائرہ پر واقع ہونگے اگر

س ا اَ جب ب ج + س ب بَ جب ج ا + س ج جَ جب اب = ۰

۱۴ – کسی مثلث کے نقاط راس ا، ب، ج سے مقابل کے اضلاع پر

عمود نکالے گئے ہیں جو اضلاع کو بالترتیب نقاط د، ع، ف پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

مس ب د مس ج ع مس ا ف = مس د ج مس ع ا مس ف ب

۱۵۔ و لا، و ما کرہ پر دو بڑے دائرے ہیں جو ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں۔ ا ب کوئی دوسرا بڑا دائرہ ہے جس پر کوئی نقطہ ن لیا گیا ہے۔ و سے قوس و ج (= ر) ا ب پر عمود ہے اور یہ قوس و لا سے زاویہ ج و لا (= عہ) بناتی ہے۔

ن م، ن ل بالترتیب و لا، و ما پر عمود ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر و م = لا اور و ل = ما تو

جم عہ مس لا + جب عہ مس ما = مس ع

۱۶۔ کرہ پر کے کسی نقطہ کا محل، ایک دوسرے کے علی القوائم دو بڑے دائروں کو حوالے کے محاور مانکر، ان دائروں کے ان حصوں طہ، فہ سے متعین کیا گیا ہے جو اس نقطہ میں سے اور محوروں پر کے دو نقطوں میں سے (جن میں سے ہر ایک محوروں کے نقطہ تقاطع سے $\frac{\pi}{2}$ فاصلہ پر واقع ہے) بڑے دائرے کھینچنے سے قطع ہوتے ہیں اگر ایسے تین نقطے (طہ، فہ)، (طہَ، فہَ) (طہً، فہً) ایک ہی بڑے دائرہ پر واقع ہوں تو ثابت کرو کہ (۶۵)

مس فہ (مس طہَ - مس طہً) + مس فہَ (مس طہً - مس طہ)
+ مس فہً (مس طہ - مس طہَ) = ۰

۱۷۔ اگر کرہ پر کے کسی نقطہ کی تعیین، ایک دوسرے کے علی القوائم دو بڑے دائروں کو حوالے کے محاور مانکر، ان دائروں کے ان حصوں طہ، فہ سے کی جائے جو ان بڑے دائروں سے قطع ہوتے ہیں جو اس نقطہ میں سے اور محوروں پر کے دو نقطوں میں سے (جن میں سے ہر ایک کا فاصلہ دائروں کے نقطہ تقاطع سے ۹۰° ہے) کھینچے گئے ہیں تو ثابت کرو کہ کسی بڑے دائرہ کی مساوات ہوگی

مس طہ مس عہ + مس فہ مس بہ = ۱

۱۸- اگر ایک کروی مثلث میں $ا = \frac{\pi}{۵}$، $ب = \frac{\pi}{۳}$ اور $ج = \frac{\pi}{۲}$ تو

ثابت کرو کہ $ا + ب + ج = \frac{\pi}{۲}$

اشکال نمبری (۴)

حسب ذیل صورتوں میں مثلثوں کو حل کرو-

(۱) ب = ۱۳۷° ۳′ ۴۸″، ا = ۱۴۷° ۲′ ۵۴″، ج = ۹۰°

جواب:- ج = ۴۷° ۵۷′ ۱۵″، ا = ۱۵۶° ۱۰′ ۳۴″، ب = ۱۱۳° ۲۸′

(۲) ج = ۶۱° ۴۴′ ۵۶″، ا = ۴۰° ۳۱′ ۲۰″، ج = ۹۰°

جواب:- ب = ۵۰° ۳۰′ ۲۹″، ب = ۶۱° ۵۰′ ۲۸″، ا = ۴۷° ۵۴′ ۲۱″

۳- ا = ۳۶°، ب = ۶۰°، ج = ۹۰°،

جواب:- ا = ۲۰° ۵۴′ ۱۸٫۵″، ب = ۳۱° ۴۳′ ۳″،

ج = ۳۷° ۲۱′ ۳۸٫۵″

۴ ا = ۵۹° ۲۸′ ۲۷″، ا = ۶۶° ۷′ ۲۰″، ج = ۹۰°

جواب:- ج = ۷۰° ۲۳′ ۴۲″، ب = ۴۸° ۳۹′ ۱۶″،

ب = ۵۲° ۵۰′ ۲۰″

یا ج = ۱۰۹° ۳۶′ ۱۸″، ب = ۱۳۱° ۲۰′ ۴۴″،

ب = ۱۲۷° ۹′ ۴۰″

اشکال نمبری (۵)

۱- اگر مثلث ا ب ج میں زاویہ ج قائمہ ہو تو حسب ذیل روابط ثابت کرو-

(۱) جب² ا + جب² ب - جب² ج = جب² ا جب ب

(۲) جم^۲ ا جب^۲ ج = جب (ج - ا) جب (ج + ا)

(۳) جب^۲ ا جم^۲ ج = جب (ا - ا) جب (ا + ا)

(۴) جم^۲ ا + جم^۲ ج - جم^۲ ا = جم^۲ ا جم^۲ ج

(۵) جب (ا + ب) مس ½ (ا + ب) = جب (ا - ب) مم ½ (ا - ب)

(۶) جب (ا + ب) = (جم ب + جم ا) / (۱ + جم ب جم ا)　　(۶۶)

جب (ا - ب) = (جم ب - جم ا) / (۱ - جم ب جم ا)

۲۔ اگر ج سے وتر ب ا پر عمود وار بڑا دائرہ ج د کھینچا جائے تو

جب^۲ ج د = مس ا د مس د ب

۳۔ ایک جہاز خط استواء پر کے ایک نقطہ سے روانہ ہوتا ہے اور ایسے بڑے دائرہ میں حرکت کرتا ہے جو استواء کو ۴۵° کے زاویہ پر قطع کرتا ہے۔ معلوم کرو کہ عرض بلد مس^۱ (½) تک پہنچنے میں اس کے طول بلد میں کتنا تغیر ہوا۔

۴۔ شمالی نصف کرہ میں ا اور ب دو مقامات ہیں جن کے عرض بلد لہ اور لہَ اور جن کے طول بلدوں کا فرق ل ہے (جہاں ل ۹۰° سے کم فرض کیا گیا ہے)۔ اگر ایک جہاز ا سے ب تک ان دو مقامات کے درمیان اقل راستہ طے کرنے میں پورے راستے پر اپنا عرض بلد بڑھاتے جائے تو ثابت کرو کہ مس لہ مم لہَ کو جم ل سے بڑا نہ ہونا چاہئے۔ (R. U. I 1898)



(۶۷)

پانچواں باب

غیر قائم الزاویہ مثلثوں کا حل

۹۶۔ بعض صورتوں میں غیر قائم الزاویہ مثلثوں کا حل، قائم الزاویہ مثلث کے حل پر لاکر منحصر کیا جا سکتا ہے۔ ان صورتوں پر بحث کرنیکے بعد ہم مثلث کی عام شکل پر غور کرینگے۔

(۱) فرض کرو کہ مثلث کا ایک ضلع ربع کے مساوی ہے۔ اس صورت میں قطبی مثلث کا متناظر زاویہ، زاویہ قائمہ ہو گا۔ اس لئے قطبی مثلث کو پچھلے باب کے قاعدوں سے حل کیا جا سکتا ہے اور پھر ابتدائی مثلث کے عنصر معلوم ہو جاتے ہیں[1]۔

(۲) فرض کرو کہ مثلث کے مفروضہ عناصر میں دو مساوی ضلع یا دو مساوی

---

[1] ربعی مثلث۔ ربعی مثلث سے متعلق ضابطے ذیل میں درج ہیں۔ اس مثلث میں ضلع ج ربع کے مساوی فرض کیا گیا ہے۔

جم ج + جم ا جم ب = ۰ ... (۱)

جب ب = جب ب جب ج
جب ا = جب ا جب ج ... (۲)

مس ا + جم ب مس ج = ۰
مس ب + جم ا مس ج = ۰ ... (۳)

مس ب = مس ب جب ا
مس ا = مس ا جب ب ... (۴)

جم ج + مم ا مم ب = ۰ ... (۵)

جم ب = جب ا جم ب
جم ا = جب ب جم ا ... (۶)

زاویے ہیں۔ راس سے قاعدہ کے نقطہ وسطی تک قوس کھینچنے سے یہ مثلث دو مساوی قائم الزاویہ مثلثوں میں تقسیم ہوتا ہے۔ ان میں سے ایک مثلث کو حل کرنے سے مطلوبہ عنصر معلوم ہو سکتے ہیں۔

(۳) فرض کرو کہ مثلث کے مفروضہ عناصر میں دو ضلع ایک دوسرے کے تکملہ یا دو زاویے ایک دوسرے کے تکملہ ہیں۔ مثلاً فرض کرو کہ ا + ب = π یا ا + ب = π ' ب ا اور ب ج کو اتنا خارج کرو کہ وہ ب' پر مکرر ملیں (دیکھو دفعہ ۳۷ پہلی شکل) تو مثلث ب' ا ج کے دو ضلع مساوی ہونگے یا دو زاویے مساوی۔ پس اس کا حل پہلی صورت کے ذریعہ قائم الزاویہ مثلث کے حل پر لاکر منحصر کیا جا سکتا ہے۔ (۶۸)

اب ہم غیر قائم الزاویہ مثلثوں کی عام شکل کے حل کی طرف رجوع ہوتے ہیں۔ چھ صورتوں پر غور کرنا ہوگا۔

۹۷۔ صورت اول۔ جبکہ تینوں ضلع دئے جائیں۔

ہم جانتے ہیں ضابطہ

$$\text{جم ا} = \frac{\text{جم ا} - \text{جم ب جم ج}}{\text{جب ب جب ج}}$$

اور ایسے ہی دو ضابطے جم ب اور جم ج کے لئے۔ لیکن یہ ضابطے لوکارتموں کے استعمال کے لئے غیر موزوں ہیں، اس لئے ایک امدادی زاویے کے ادخال سے انکی شکل میں ترمیم کرنے کی ضرورت ہوگی۔ مثلاً ہم ایک زاویہ فہ کی تعریف رشتہ مس فہ = جم ج جب ب قط ا سے کر سکتے ہیں اور تب جم ا کو معلوم کرنے کا مندرجہ بالا ضابطہ شکل

$$\text{جم ا} = \frac{\text{جم ج جب (ب - فہ)}}{\text{جب ب جب فہ}} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

میں تحویل ہو جاتا ہے۔ لیکن مطلوبہ نتیجوں تک پہنچنے کا یہ ایک غیر ضروری طویل طریقہ ہے۔ بہتر یہ ہے کہ دفعہ ۵۰ میں نصف زاویہ کی جیب، جیب التمام

اور مماس کے لئے جو ضابطے دئے گئے ہیں ان میں سے کسی ایک کا استعمال کیا جائے جو لوکارتموں کے لئے موزوں ہیں۔ ضابطہ کے انتخاب میں ان ہدایتوں کو پیش نظر رکھنا ضروری ہے جو علم مثلث مستوی[1] (از مصنف) کے بارھویں باب کے ختم پر درج ہیں۔

جہازرانی میں ضابطہ

جب² ½ ا = جب (س - ب) جب (س - ج) / جب ب جب ج ..... (۲)

کا ہمیشہ استعمال ہوتا ہے اور خاص طور پر تیار کی ہوی جدولیں[2] موجود رہتی ہیں جن سے جب² ½ ا کا لوکارتم معلوم ہو سکتا ہے یعنے قوس کے ہر پندرہ ثانیوں کے وقفہ سے ا کی قیمتوں کے لئے ا کی تنصیف کردہ سہم الجیب (یا جسکو بالعموم نیم سہم الجیب (Haversine) کہا جاتا ہے) کا لوکارتم معلوم ہو سکتا ہے۔ اس طرح مطلوبہ عناصر کی تقریبی قیمتیں بہت سرعت کے ساتھ محسوب کیجا سکتی ہیں۔

لیکن اگر نیم سہم الجیبی جدولیں مہیا نہ ہوں تو ضابطہ (۶۹)

مس ½ ا = √(جب (س - ب) جب (س - ج) / جب س جب (س - ا)) ..... (۳)

سے استفادہ کیا جا سکتا ہے اور جب مثلث کا صرف ایک زاویہ ہی نہیں بلکہ سب زاوئے معلوم کرنا ہوں تو اس مماسی جملہ کو ہمیشہ استعمال کرنا چاہئے کہ اس میں لوکارتموں کی کم سے کم تعداد دیکھنے کی ضرورت ہوگی۔

طریق عمل حسب ذیل ہے:-

[1] یہاں علم مثلث مستوی سے مصنف کی کتاب (Plane Trigonometry) مراد ہے۔

[2] دیکھو Inman's Nautical Tables, or Raper's Practice of Navigation

رکھو　مس ر = √ [جب (س-ا) جب (س-ب) جب (س-ج) / جب س] .... (۴)

آئندہ چلکر یہ معلوم ہوگا کہ ر، مثلث کے اندرونی دائرہ کا نصف قطر ہے لیکن فی الوقت ہمیں اسکی صراحت سے کوئی تعلق نہیں ہے۔ مس ر کا لوگارثم معلوم کرو اور پھر ضابطوں

مس ½ ا = مس ر / جب (س-ا) ، مس ½ ب = مس ر / جب (س-ب) ،

مس ½ ج = مس ر / جب (س-ج) .... (۵)

کا استعمال کرو۔

۹۸ ـ عددی مثال۔ مثال کے طور پر فرض کرو کہ مثلث میں

ا = ۷۰° ۱۴′ ۲۰″
ب = ۴۹° ۲۴′ ۱۰″
ج = ۳۸° ۴۶′ ۱۰″

تو عمل حسب ذیل ہوگا

۲س = ۱۵۸° ۲۴′ ۴۰″
س = ۷۹° ۱۲′ ۲۰″
س - ا = ۸° ۵۸′ ۰″
س - ب = ۲۹° ۴۸′ ۱۰″
س - ج = ۴۰° ۲۶′ ۱۰″

ل جب (س-ا) = ۹٫۱۹۲۷۳۴۲　　ل مس ½ ا = ۱۰٫۱۶۱۶۸۳۲
ل جب (س-ب) = ۹٫۶۹۶۳۷۰۴　　ل مس ½ ب = ۹٫۶۵۸۰۴۷۰
ل جب (س-ج) = ۹٫۸۱۱۹۷۶۸　　ل مس ½ ج = ۹٫۵۴۲۴۴۰۶

۸٫۷۰۱۰۸۱۴　　½ ا = ۵۵° ۲۵′ ۳۸″

ل جب س = ۹٫۹۹۲۲۴۶۵

ل مس^۲ ر = ۸٫۷۰۸۸۴۴۹
ل مس ر = ۹٫۳۵۴۴۱۷۴

½ ب = °۲۴ ′۲۸ ″۲

½ ج = °۱۹ ′۱۳ ″۲۴

ا = °۱۱۰ ′۵۱ ″۱۶
ب = °۴۸ ′۵۶ ″۴
ج = °۳۸ ′۲۶ ″۴۸

۹۹ ـ صورت دوم :- جبکہ تینوں زاویے دئے جائیں ـ　(۱۰)

یہاں جم ر = $\frac{\text{جم ا + جم ب جم ج}}{\text{جب ب جب ج}}$ اور اسی طرح کے دو اور جملے
جم ب اور جم ج کے لئے۔ ایک زاویہ فہ لو ایسا کہ مس فہ = جم ج جب ب قط ا
تو اوپر کا ضابطہ لوگارثموں کے لئے موزوں ہو جاتا ہے، اس طرح

جم ر = $\frac{\text{مم ج جب (ب + فہ)}}{\text{جب ب جب فہ}}$ .... (۶)

لیکن بہتر یہ ہے کہ دفعہ ۵۶ میں نصف ضلع کی جیب، جیب التمام
اور مماس کے لئے جو جملے دئے گئے ہیں ان میں سے کسی ایک کا استعمال
کیا جائے۔ مثلاً ایک واحد ضلع ضابطہ

مس ½ ر = $\sqrt{-\frac{\text{جم س جم (س ـ ا)}}{\text{جم (س ـ ب) جم (س ـ ج)}}}$ ...... (۷)

کے ذریعہ بہ آسانی محسوب کیا جا سکتا ہے ـ
جب تینوں ضلع مطلوب ہوں تو سب سے مختصر طریقہ یہ ہے :-

فرض کرو　مم^۲ ر = $-\frac{\text{جم (س ـ ا) جم (س ـ ب) جم (س ـ ج)}}{\text{جم س}}$

(۸) ....

مم ر کا لوکارتم معلوم کرو اور پھر ا، ب، ج، ضابطوں

$$\text{مم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ا} = \frac{\text{مم ر}}{\text{جم}\ (\text{س} - \text{ا})}\ ،\quad \text{مم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ب} = \frac{\text{مم ر}}{\text{جم}\ (\text{س} - \text{ب})}\ ،$$

$$\text{مم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ج} = \frac{\text{مم ر}}{\text{جم}\ (\text{س} - \text{ج})} \quad \ldots\ldots\ (۹)$$

سے معلوم کرلو۔

عمل میں وہی ترتیب ہونی چاہئے جو پچھلے دفعہ میں عددی مثال کی ہے۔ ان دونوں صورتوں میں مشابہت ظاہر ہے۔ آئندہ چلکر یہ معلوم ہوگا (دفعہ ۱۲۲) کہ ر، مثلث کے بیرونی دائرہ کا زاوی نصف قطر ہے۔

۱۰۰۔ پچھلی صورتوں میں کسی قسم کا ابہام نہیں ہے لیکن یہ ہوسکتا ہے کہ مفروضہ عناصر ایسے ہوں کہ مثلث کا وجود ناممکن ہو۔

۱۰۱۔ صورت سوم۔ جبکہ دو ضلع اور ان کا درمیانی زاویہ دئے جائیں (ا، ج، ب)۔

نیپیر کی تمثیلوں سے

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا} + \text{ب}) = \frac{\text{جم}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا} - \text{ب})}{\text{جم}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا} + \text{ب})}\ \text{مم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ج} \quad \ldots\ldots\ (۱۰)$$

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا} - \text{ب}) = \frac{\text{جب}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا} - \text{ب})}{\text{جب}\ \tfrac{1}{2}(\text{ا} + \text{ب})}\ \text{مم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ج} \quad \ldots\ldots\ (۱۱)$$ (۱۷)

ان سے $\tfrac{1}{2}(\text{ا} + \text{ب})$ اور $\tfrac{1}{2}(\text{ا} - \text{ب})$ کی تعیین ہوتی ہے اور پھر ا اور ب معلوم ہو جاتے ہیں۔

اس کے بعد ج کو ضابطہ $\text{جب ج} = \frac{\text{جب ا جب ج}}{\text{جب ا}}$ سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

اس صورت میں چونکہ ج کو اس کی جیب سے معلوم کرنا ہوتا ہے اس لئے یہ امر مشتبہ ہو سکتا ہے کہ اس کی دو قیمتوں میں سے کونسی قیمت اسے دیجائے اس کا تصفیہ بعض صورتوں میں یہ دیکھ کر کیا جاسکتا ہے کہ مثلث کا بڑا ضلع بڑے زاویے کے مقابل ہونا چاہیے۔ یا ہم ڈلمبر کی کسی ایک تمثیل سے ج کو متعین کر سکتے ہیں مثلاً دفعہ ۶۳ کی مساوات (۴۵)

$$\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ج} = \frac{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})\,\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ج}}{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})} \quad \ldots\ldots\ (۱۲)$$

سے ج بغیر کسی ابہام کے معلوم ہوتا ہے۔

۱۰۲ — عددی مثال۔ مثال کے طور پر فرض کرو کہ مثلث میں

ا = ۶۸° ۲۰′ ۲۵″ ، ب = ۵۲° ۱۸′ ۱۵″ ، ج = ۱۱۷° ۱۲′ ۲۰″

عمل حساب حسب ذیل ہوگا:۔

½ (ا − ب) = ۸° ۱′ ۵″ ، ½ (ا + ب) = ۶۰° ۱۹′ ۲۰″ ، ½ ج = ۵۸° ۳۶′ ۱۰″

ل جب ½ (ا − ب) = ۹٫۱۴۴۵۲۸۰ ل جم ½ (ا − ب) = ۹٫۹۹۵۷۳۳۵
ل جب ½ (ا + ب) = ۹٫۹۳۸۹۳۱۶ ل جم ½ (ا + ب) = ۹٫۶۹۴۷۱۲۰

۹٫۲۰۵۵۹۶۴ ۱۰٫۳۰۱۰۲۱۵
ل ضم ½ ج = ۹٫۷۸۵۵۶۹۰ ل جب ½ ج = ۹٫۹۳۱۲۴۲۲

ل مس ½ (ا − ب) = ۸٫۹۹۱۱۶۵۴ ۹٫۶۲۹۵۴۲
ل مس ½ (ا + ب) = ۱۰٫۰۸۶۵۹۰۵ ل جم ½ (ا + ب) = ۹٫۸۰۱۹۰۱۵

½ (ا − ب) = ۵° ۲۵′ ۴۷″ ل جم ½ ج = ۹٫۸۲۴۴۰۵۲۷
½ (ا + ب) = ۵۰° ۴۰′ ۲۸″ ½ ج = ۴۸° ۱۰′ ۲۲″
ا = ۵۶° ۱۲′ ۱۵″ ج = ۹۶° ۲۰′ ۴۴″

ب = ۴۵° ۴ ۱۸ََ

۱۰۳ — ا اور ب کو اول معلوم کرنے کے بغیر بھی ہم ضابطہ

جم ج = جم ا جم ب + جب ا جب ب جم ج . . . . (۱۳)

سے ج کو بغیر ابہام کے معلوم کر سکتے ہیں۔ یہ ضابطہ لوکارتموں کے لئے موزوں ہو سکتا ہے اگر ہم امدادی زاویہ ط لیں ایسا کہ

مس ط = مس ب جم ج . . . . (۱۴)

تب جم ج کا جملہ ہو جاتا ہے

جم ج = جم ب (جم ا + جب ا مس ط) = $\frac{\text{جم ب جم (ا - ط)}}{\text{جم ط}}$ . . . (۱۵)

اس کے ساتھ ہی مثلث کے زاویوں میں سے ایک زاویہ بغیر ابہام کے معلوم کیا جا سکتا ہے[1] کیونکہ اگر ہم دفعہ ۹۴ کے ضابطوں میں سے دوسرا ضابطہ استعمال کریں تو

مم ب = $\frac{1}{\text{جب ج}}$ {مم ب جب ا - جم ا جم ج} . . . (۱۶)

= $\frac{\text{مم ج}}{\text{جب ط}}$ جب (ا - ط) . . . . (۱۷)

۱۰۴ — **عددی مثال** — مثال کے طور پر اگر ہم اس مثلث پر غور کریں جس کو ہم نے ابھی ایک دوسرے طریقہ سے حل کیا ہے تو سب سے پہلے ط کو ضابطہ مس ط = مس ب جم ج سے معلوم کرنا ہو گا۔

یہاں جم ج منفی ہے اور اس لئے مس ط منفی ہو گا اور ط ایک زاویہ قائمہ سے بڑا۔ جم ج کی عددی قیمت وہی ہے جو جم ۶۲° ۱۸ََ ۱۸َ کی ہے۔

[1] مقابلہ کرو دفعہ ۵۲ کے ضابطوں (۲۲) اور (۲۳) کے ساتھ۔

ل سں ب = ۱۰٫۱۱۱۹۴۸۸

ل جم ۶۲° ۴۷′ ۴۰″ = ۹٫۶۶۰۰۹۱۲

ل سں (۱۸۰° − ط) + ۱۰ = ۱۹٫۷۷۲۰۴۰۰

۱۸۰° − ط = ۳۰° ۳۶′ ۳۳″

∴ ط = ۱۴۹° ۲۳′ ۲۷″

اسکے بعد ہم ضابطہ جم ج = (جم ب جم (ا − ط)) / (جم ط) سے ج معلوم کرتے ہیں ۔

یہاں جم ط منفی ہے اور اس لئے جم ج منفی ہوگا اور ج ایک زاویہ قائمہ سے بڑا۔ جم ط کی عددی قیمت وہی ہے جو جم (۱۸۰° − ط) کی ہے یعنی جو جم ۳۰° ۳۶′ ۳۳″ کی ہے، اور جم (ا − ط) کی قیمت وہی ہے جو جم (ط − ا) کی یعنی جو جم ۸۱° ۳′ ۲″ کی ہے ۔

ل جم ب = ۹٫۷۸۶۳۷۴۸ (۳)

ل جم ۸۱° ۳′ ۲″ = ۹٫۱۹۱۹۰۶۰

۱۸٫۹۷۸۲۸۰۸

ل جم ۳۰° ۳۶′ ۳۳″ = ۹٫۹۳۴۸۳۱۹

ل جم (۱۸۰° − ج) = ۹٫۰۴۳۴۴۸۹

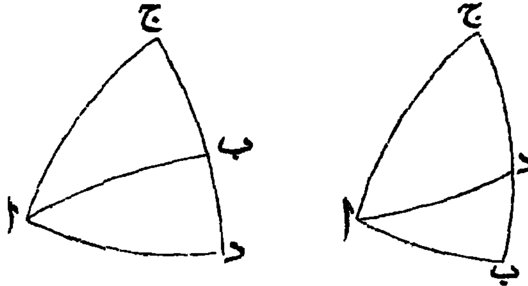
۱۸۰° − ج = ۸۳° ۳۹′ ۱۷″

ج = ۹۶° ۲۰′ ۴۳″

پس جدولوں سے ثانیوں کی صرف قریب ترین تعداد لینے سے ج کی دونوں طریقوں سے جو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں ان کا فرق ۱″ ہے، لیکن اگر ہم ثانیہ کی کسروں کو بھی شمار کریں تو دونوں طریقوں سے

ثانیوں کی تعداد تقریباً ۴۳ ½ حاصل ہوگی۔

۱۰۵ ۔ دفعہ ۱۰۳ کا طریقہ فی الحقیقت مثلث کو دو قائم الزاویہ مثلثوں کے مجموعہ یا فرق میں تحلیل کرنے کے مماثل ہے۔



ا سے ج ب یا ج ب ممدودہ پر قوس ا د عمود کھینچو تو دفعہ ۶۲ سے مس ج د = مس ب مس ج ۔ اس سے ج د کی تعیین ہوتی ہے اور پھر د ب معلوم ہوتا ہے۔ پھر دفعہ ۶۳ سے

جم ج = جم ا د جم د ب = جم د ب $\frac{\text{جم ب}}{\text{جم ج د}}$

اس سے ج معلوم ہوتا ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ ج د وہی ہے جو دفعہ ۱۰۳ میں ط سے تعبیر ہوا تھا۔

دفعہ ۶۲ سے

مس ا د = مس ج جب ج د اور مس ا د = مس د ا ب جب د ب

اس طرح مس ا ب د جب د ب = مس ج جب ط

جہاں د ب = ا ۔ ط یا ط ۔ ا بموجب اس کے کہ د ج ب پر یا ج ب ممدودہ پر واقع ہو اور زاویہ ا ب د ب یا ب کا تکملہ ہے۔ (۴) اس ضابطہ سے ہم ب کو ا سے بلا واسطہ معلوم کر سکتے ہیں۔

پس موجودہ صورت میں کوئی حقیقی ابہام نہیں ہے اور مثلث ہمیشہ ممکن ہے۔

۱۰۶ — صورت چہارم — جبکہ دو زاوئے اور ان کا درمیانی (مشترک) ضلع دئے جائیں (ا، ج، ب)۔

نیپیر کی تمثیلات سے

$$\text{س}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب}) = \frac{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})}\,\text{س}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ج} \quad \ldots\ldots (18)$$

$$\text{س}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب}) = \frac{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})}\,\text{س}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ج} \quad \ldots\ldots (19)$$

اِنسے ½(ا + ب) اور ½(ا − ب) معلوم ہوتے ہیں اور اسلئے ا اور ب معلوم ہو جاتے ہیں۔

اس کے بعد ج کو ضابطہ $\text{جب ج} = \frac{\text{جب ا جب ج}}{\text{جب ا}}$ سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اس صورت میں ج کو چونکہ اس کی جیب سے معلوم کیا ہے اس لئے یہ امر مشتبہ ہو سکتا ہے کہ [illegible] قیمتوں میں سے کونسی قیمت لینی چاہئے۔ اس کا تصفیہ بعض صورتوں میں یہ دیکھ کر ہو سکتا ہے کہ مثلث کا بڑا زاویہ بڑے ضلع کے مقابل ہوتا ہے۔ تاہم ڈیلامبر کی کسی ایک تمثیل سے ج کی قیمت معین کر سکتے ہیں (دفعہ ۷۳ کی مساوات [illegible])

$$\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ج} = \frac{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})\ \ldots\ \tfrac{1}{2}\,\text{ج}}{[\text{illegible}]}$$

سے ج کی قیمت بلا ابہام معلوم ہو جاتی ہے۔ ½ ج ۹۰° سے متجاوز نہیں ہو سکتا۔

۱۰۷ — چونکہ ا اور ب کی قیمتیں معلوم ہیں اس لئے ہم ضابطہ جم ج = − جم ا جم ب − جب ا جب ب جم ج سے ج معلوم کر سکتے ہیں۔ یہ ضابطہ لوگارتھمی حساب کے قابل ہو سکتا ہے اس طرح۔

جم ج = جم ب (− جم ا + جب ا س ب جم ج)

مان لو مم فہ = مس ب جم ج تو

جم ج = جم ب (- جم ا + مم فہ جب ا) = جم ب جب (ا - فہ) / جب فہ

جو لوگارتموں کے لئے موزوں ہے۔

(۷۵) ۱۰۸ — یا ہم مثلث کو دو قائم الزاویہ مثلثوں کے مجموعہ یا فرق میں تحلیل کر کے اس کو آسانی سے حل کر سکتے ہیں۔ ا سے ج ب پر قوس ا د عمود کھینچو (دیکھو دفعہ ۱۰۵ دوسری شکل) تو دفعہ ۷۳ سے جم ج = مم ب مم ∠ د ا ب اور اس سے زاویہ د ا ب کی تعین ہوتی ہے اور پھر ج ا د معلوم ہوتا ہے پھر دفعہ ۷۳ سے

جم ا د جب ∠ ج ا د = جم ج، اور جم ا د جب ∠ ب ا د = جم ب

اس لئے جم ج / جب ج ا د = جم ب / جب ب ا د

اس سے ج معلوم ہوتا ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ زاویہ د ا ب وہی ہے جو دفعہ ماسبق میں فہ سے تعبیر ہوا تھا۔

دفعہ ۷۳ سے

مس ا د = مس ا ج جم ج ا د، اور مس ا د = مس ا ب جم ب ا د

پس مس ب جم ج ا د = مس ج جم فہ

جہاں زاویہ ج ا د = ا - فہ۔ اس ضابطہ سے ب، ا کے بلاواسطہ معلوم ہو سکتا ہے۔

اگر عمود ا د، ج ب ممدودہ پر واقع ہو تو اسی طرح کے عمل سے مثلث کو حل کیا جا سکتا ہے (دیکھو دفعہ ۱۰۵ پہلی شکل)۔

اس طرح موجودہ صورت میں کوئی حقیقی ابہام نہیں ہے۔ مزید براں مثلث ہمیشہ ممکن ہے۔

۱۰۹ — صورت پنجم — جبکہ دو ضلع اور ان میں سے کسی ایک کے مقابل کا

زاویہ دئے جائیں (ا، ب، ا) ۔

زاویہ ب، ضابطہ

$$\text{جب ب} = \frac{\text{جب ب}}{\text{جب ا}}\ \text{جب ا} \quad \ldots\ldots\ (۲۱)$$

سے معلوم ہو سکتا ہے اور پھر ج اور ج، نیپیر کی تمثیلوں

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ج} = \frac{\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\ (\text{ا} - \text{ب})}{\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\ (\text{ا} + \text{ب})}\ \text{مم}\ \tfrac{1}{2}\ (\text{ا} - \text{ب}) \quad \ldots\ (۲۲)$$

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ج} = \frac{\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\ (\text{ا} + \text{ب})}{\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\ (\text{ا} - \text{ب})}\ \text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ (\text{ا} - \text{ب}) \quad \ldots\ (۲۳)$$

سے معلوم ہو سکتے ہیں۔ اس صورت میں چونکہ ب کو اسکی جیب سے معلوم کرنا ہوتا ہے اس لئے بعض اوقات دو حل ملینگے اور بعض اوقات کوئی حل ہی نہ ہوگا اور یہ اس وقت ہوگا جبکہ جب ب کی حاصل شدہ قیمت ایک سے بڑی ہو۔

۱۱۰ — جب، ب کی دو قیمتیں حاصل ہوں تو اِن میں سے کسی ایک کے قابل قبول ہونے کے لئے یہ ضروری ہے کہ مس $\tfrac{1}{2}$ ج اور مس $\tfrac{1}{2}$ ج کی مثبت قیمتیں حاصل ہوں جبکہ اِن کو مساواتوں (۲۲) اور (۲۳) میں درج کیا جائے۔ اب چونکہ جب $\tfrac{1}{2}$ (ا + ب) اور جب $\tfrac{1}{2}$ (ا - ب) ہمیشہ مثبت ہیں، اور $\tfrac{1}{2}$ (ا - ب) اور $\tfrac{1}{2}$ (ا - ب) عدداً ۹۰° سے کم ہیں اِس لئے جس بات کی ضرورت ہے وہ صرف اس میں تحویل ہو جاتی ہے کہ ا - ب اور ا+ب ہم علامت ہونے چاہئیں۔

یہ بتانا کچھ مشکل نہیں ہے کہ یہ ضروری شرط اس مثلث کے وجود کے لئے کافی شرط بھی ہے جس کے عناصر ا، ب، ا، ب ہوں۔ فرض کرو کہ ج اور ج کی قیمتیں (۲۲) اور (۲۳) سے حاصل کر لیگئی ہیں۔ ج چونکہ حسب قرارداد ۱۸۰° سے چھوٹا ہے اس لئے ایک مثلث بنایا جا سکتا ہے جس کے عناصر ا، ب، ج ہوں اور اگر اس کے باقی دو سرے عناصر ا، ب، ج

ہوں تو اِن عنصروں کو (۲۱)، (۲۲)، اور (۲۳) کی شکل کی مساواتوں کو پورا کرنا چاہیئے۔ پس یہ دیکھ لینا آسان ہے کہ اَ = ا، بَ = ب، اور جَ = ج اور اس لئے جو مثلث اس طور پر بنتا ہے وہ ابتدائی مفروضات کو پورا کرتا ہے۔

پس دئے ہوئے عناصر رکھنے والے مثلث کو معلوم کرنے کے مسئلہ کے دو حل ہیں یا ایک حل ہے بموجب اس کے کہ ب کی دونوں قیمتیں ہوں یا ایک قیمت ہو ایسی کہ جو ا ـ ب اور ا ـ ب کو ہم علامت بنائے اور کوئی حل نہیں ہے اگر ب کی کوئی قیمت، ا ـ ب اور ا ـ ب کو ہم علامت نہ بنائے۔ ہم کسی آیندہ دفعہ میں اس مضمون کی طرف رجوع ہونگے اور تفصیل کے ساتھ اس کا امتحان کرینگے۔

۱۱۱ ـــ عددی مثال ـــ مفروضات

ا = ۵۰° ۴۵َ ۲۰ً، ب = ۶۹° ۱۶َ ۴۰ً، ا = ۴۴° ۲۲َ ۱۰ً

عمل حساب حسب ذیل ہوگا:

½ (ا + ب) = ۵۹° ۵۹َ ۰ً، ½ (ا ـ ب) = ـ ۹° ۱۳َ ۴۰ً

ل جب ب = ۹٫۹۷۰۷۶۲۲ ب۱ = ۵۷° ۳۴َ ۵۱٫۴ً

ل جب ا = ۹٫۸۸۸۹۹۵۶ ب۲ = ۱۲۲° ۲۵َ ۸٫۶ً

۰٫۰۸۱۷۶۷۰ ا = ۴۴° ۲۲َ ۱۰ً

ل جب ا = ۹٫۸۴۴۶۵۲۵ ا ـ ب۱ = ـ ۱۳° ۱۲َ ۴۱٫۴ً

ل جب ب = ۹٫۹۲۶۴۱۹۵ ا ـ ب۲ = ـ ۷۸° ۲َ ۵۸٫۶ً

دو حل ہیں کیونکہ ا ـ ب۱، ا ـ ب۲، اور ا ـ ب سب منفی ہیں۔ (۷۷)

½ (ب۱ ـ ا) = ۶° ۳۶َ ۲۰٫۷ً ½ (ب۲ ـ ا) = ۳۹° ۱َ ۲۹٫۳ً

½ (ب۱ + ا) = ۵۰° ۵۸َ ۳۰٫۷ً ½ (ب۲ + ا) = ۸۳° ۲۳َ ۳۹٫۳ً

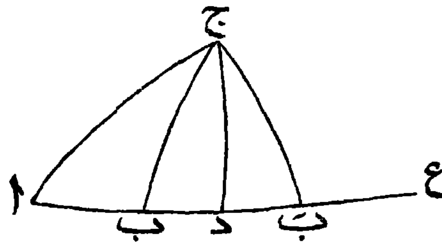
ل جب ½ (ب ـ ا) = ۹٫۲۰۵۰۹۵۲ ل جب ½ (ب۱ + ا) = ۹٫۸۹۰۳۵۰۳

ل جب ½ (ب + ا) = ۹٫۹۳۷۴۵۷۷ ل جب ½ (ب۱ ـ ا) = ۹٫۰۶۰۸۳۶۶

۹٫۲۶۷۰۶۳۷۵ ۰٫۸۲۹۵۱۳۷

ل مم ½(ب₁ - ا) = ۱۰٫۹۳۶۲۷۰۵	ل جب ½(ب₂ + ا) = ۹٫۹۹۷۱۰۷۲
ل مم ½(ب₂ - ا) = ۱۰٫۰۹۱۲۴۶۴	ل جب ½(ب₂ - ا) = ۹٫۷۹۹۱۰۳۹
	۰٫۱۹۸۰۰۳۳
	ل س ½(ب - ا) = ۹٫۳۱۰۷۵۲۳
ل س ½ج₁ = ۱۰٫۲۰۳۹۰۸۰	ل س ½ج₁ = ۱۰٫۰۴۰۲۶۶۰
ل س ½ج₂ = ۹٫۳۵۸۸۸۳۹	ل س ½ج₂ = ۹٫۴۰۸۷۵۵۶
½ج₁ = ۵۷° ۵۸′ ۵۵٫۳″	½ج₁ = ۴۷° ۳۹′ ۸٫۳″
½ج₂ = ۱۲° ۵۲′ ۸٫۱۵″	½ج₂ = ۱۴° ۲۲′ ۳۴٫۳″
ج₁ = ۱۱۵° ۵۷′ ۵۰٫۶″	ج₁ = ۹۵° ۱۸′ ۱۶٫۶″
ج₂ = ۲۵° ۴۴′ ۱۶٫۳″	ج₂ = ۲۸° ۴۵′ ۸٫۴″

۱۱۲ — ہم مثلث کو دو قائم الزاویہ مثلثوں کے مجموعہ یا فرق میں تحلیل کرکے بھی صورت پنجم کو آسانی سے حل کر سکتے ہیں۔



فرض کرو کہ ج ا = بَ اور زاویہ ج ا ع = دیا ہوا زاویہ ا۔
ج سے ا ع پر عمود ج د کھینچو اور فرض کرو کہ ج ب اور ج بَ = دَ

پس شکل کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ دو مثلث ہو سکتے ہیں جن میں دیے ہوئے عناصر شامل ہوں۔ اب دفعہ ۳۷ سے جم ب = مم ا مم ا ج د ' اس سے زاویہ ا ج د معلوم ہوتا ہے۔ پھر اُسی دفعہ سے

مس ج د = مس ا ج جم ا ج د

اور مس ج د = مس ج ب جم ب ج د

= مس ج بَ جم بَ ج د

(۴۸) اس لئے مس ا ج جم ا ج د = مس ج ب جم ب ج د

= مس ج بَ جم بَ ج د

اس سے زاویہ ب ج د یا بَ ج د معلوم ہوتا ہے۔

نیز دفعہ ۳۷ سے مس ا د = مس ا ج جم ا ' اِس سے ا د حاصل ہوتا ہے۔ اب

جم ا ج = جم ج د جم ا د

جم ب ج = جم ج د جم ب د

یا جم بَ ج = جم ج د جم بَ د

اس لئے (جم ا ج)/(جم ا د) = (جم ج ب)/(جم ب د) یا (جم ج بَ)/(جم بَ د)

اس سے ب د یا بَ د معلوم ہوتا ہے۔

۱۱۳ — ریڈ (Reidt.) کا طریقۂ حل۔ جب ہم ترقیم

ا + اَ = ۴ س ' ا - اَ = ۴ د

ب + بَ = ۴ سَ ' ب - بَ = ۴ دَ ......(۲۴)

ج + جَ = ۴ سً ' ج - جَ = ۴ دً

استعمال کرتے ہیں تو ہم نے یہ دیکھا ہے کہ ریڈ کی پہلی دو تمثیلات (دفعہ ۶۹ ' (۶۳) اور (۶۴) ویں مساواتیں) یہ شکل اختیار کرتی ہیں

مس ۲ (۴۵° - سَ) = مم (س - سَ) مس (س + سَ) مس (د - دَ) مس (د + دَ)

(۲۵) . . . .

مس ۲ (۴۵° - دَ) = مس (س - سَ) مس (س + سَ) مم (د - دَ) مس (د + دَ)

(۲۶) . . . .

اب جبکہ ب کی دو قیمتیں جیبی ضابطے سے معلوم کرلی گئی ہوں تو ہم ان میں سے ایک قیمت لے سکتے ہیں (مثلاً وہ قیمت جو ۹۰° سے کم ہے) ہم اس قیمت کو ان تمثیلات کی بائیں جانب درج کرتے ہیں تو ان تمثیلوں سے سَ اور دَ کی متناظر قیمتیں معلوم ہوسکتی ہیں اور پھر ج اور ج کی۔ اس کے بعد دوسرے مثلث (وہ جس میں ب منفرجہ ہے) کے عناصر ج اور ج دفعہ ۶۹ کی مساواتوں (۶۷) اور (۶۸)

مس ۲ دَ = مس (س - سَ) مم (س + سَ) مس (د - دَ) مس (د + دَ)

(۲۷) . . . .

مس ۲ سَ = مس (س - سَ) مس (س + سَ) مس (د - دَ) مم (د + دَ)

(۲۸) . . . .

سے اخذ کئے جاتے ہیں۔

اس طریقہ کا بڑا فائدہ یہ ہے کہ جب ایکبار ب معلوم کرلیا جاتا ہے تو حل کو مکمل کرنے کے لئے صرف چار لوکارتموں کو دیکھنے کی ضرورت پڑتی ہے بجائے اسکے کہ چھ لوکارتم دیکھے جائیں جیسا کہ دوسرے طریقوں پر کرنا پڑتا ہے۔

۱۱۴ـ عددی مثال ـ مفروضات (Reidt, 937, No. 3) (۷۹)

ب = ۷۰° ۴۰′، د = ۱۴° ۲۰′، أ = ۴۰°

ل جیب ب = ۹٫۹۷۴۷۹ ب۱ = ۶۹° ۳۴′ ۳۰″

ل جیب د = ۹٫۸۱۱۰۶ ب۲ = ۱۱۰° ۲۵′ ۳۰″

۰٫۱۶۳۷۳

ل جب ا = ۹٫۸۰۸۰۷

ل جب ب = ۹٫۹۷۱۸۰

سَ = ۳۵° ۳′ ۳۷″ س − سَ = −۱۴° ۵۸′ ۳۷″

دَ = −۰° ۱۶′ ۲۲″ د − دَ = ۰° ۱۱′ ۲۲″

س = ۲۰° ۵′ س + سَ = ۵۵° ۸′ ۳۷″

د = −۰° ۵′ د + دَ = −۰° ۲۱′ ۲۲″

ل سس (س − سَ) = ۹٫۴۲۷۳۶ (منفی)؛ ۴۵° − سً = ۰° ۳۶′ ۷″

ل سس (د − دَ) = ۷٫۵۱۹۶۸ ۴۵° − دً = ۴۰° ۲۱′ ۲″

ل سس (س + سَ) = ۱۰٫۱۵۷۱۰ ۹۰° − ۲سً = ۱° ۱۲′ ۱۴″

ل سس (د + دَ) = ۷٫۷۹۳۶۴ (منفی)؛ ۹۰° − ۲دً = ۸۰° ۴۲′ ۴″

ل سس² (۴۵° − سً) = ۶٫۰۴۳۰۶ ۲سً = ۸۸° ۴۷′ ۴۶″

ل سس² (۴۵° − دً) = ۹٫۸۵۸۴۲ ۲دً = ۹° ۱۷′ ۵۶″

ل سس² دً = ۴٫۵۸۳۵۸ ج = ۹۸° ۵′ ۴۲″

ل سس² سً = ۹٫۳۱۰۵۰ ج = ۷۹° ۲۹′ ۵۰″

ل سس (۴۵° − سً) = ۸٫۰۲۱۵۳ یا دً = ۰° ۶′ ۴۴″

ل سس (۴۵° − دً) = ۹٫۹۲۹۲۱ سً = ۲۴° ۱۹′ ۴۲″

ل سس دً = ۷٫۲۹۱۷۹ ۲دً = ۰° ۱۳′ ۲۸″

ل سس سً = ۹٫۶۵۵۲۵ ۲سً = ۴۸° ۳۹′ ۲۴″

ج = ۴۸° ۵۲′ ۵۲″

جً = ۴۸° ۲۵′ ۵۶″

۱۱۵ — اگر ج، اپنی جیب سے کافی صحت کے ساتھ معلوم نہ ہو سکے تو ضابطۂ ذیل

استعمال کیا جا سکتا ہے۔

جب ا جب² (۴۵° - ½ ب) = جم ½ (ا + ب) جب ½ (ا - ب)

+ جب ب جب² (۴۵° - ½ ا) ...... (۲۹)

۱۱۶ — صورت ششم — جبکہ دو زاویے اور ان میں سے کسی ایک کے مقابل کا ضلع دیئے جائیں (ا، ب، ا)۔

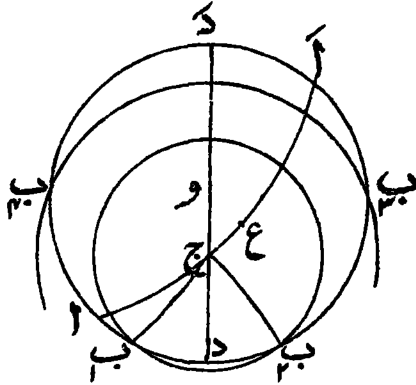
یہ صورت پچھلی صورت کے مشابہ ہے اور اسی طرح کے ابہام اس میں پیدا ہوتے ہیں۔ ضلع ب، ضابطہ

جب ب = (جب ا جب ب) / (جب ا) ...... (۳۰)

سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اور پھر ج اور ج، نیپیر کی تمثیلات سے یا ریڈکی (۸۰)
تمثیلات سے معلوم ہو سکتے ہیں۔ ضابطے وہی ہیں جو صورت پنجم میں استعمال ہوئے ہیں۔

۱۱۷ — اب ہم اس باب کی پانچویں صورت میں جو ابہام پیدا ہو سکتا ہے اس کی طرف رجوع ہوتے ہیں یعنے جب مثلث کے دو ضلع اور ان میں سے کسی ایک کے مقابل کا زاویہ دئے جائیں۔ ہم یہ معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ دئے ہوئے عناصر کی تفتیش سے اس امر کا کس طرح اندازہ لگایا جائے کہ مثلث کے آیا دو حل ہیں یا ایک حل ہے یا کوئی حل نہیں ہے۔

اس کی تحقیق کرنے کا سادہ ترین طریقہ یہ ہے کہ اس مسئلہ کو عملی ہندسہ کا سوال قرار دیا جائے۔ ایک سیدھا طریقہ فوراً خود پیش ہوتا ہے جس سے مثلث بن جانا چاہیئے اگر مثلث ایک ممکن مثلث ہو اور جب یہ طریقہ ناکام ہوتا ہے تو اس ناکامی کا مطلب واضح ہے۔



دئے ہوئے عناصر ا، ب، اِ ہیں اور چونکہ مثلث کی صرف شکل سے نہ کہ اس کے محل سے ہمیں واسطہ ہے اس لئے زاویہ ا کو بنانے والے بڑے دائروں میں سے ایک بڑا دائرہ ا د اَ دَ لو اور اس پر
(۱۸) کوئی نقطہ ا لیکر اس کو راس قرار دو۔ پھر بڑا دائرہ ا ع اَ کھینچو جو پہلے بڑے دائرہ کے ساتھ دیا ہوا زاویہ ا بنائے اور اس پر قوس ا ج ب کی دی ہوئی قیمت کے مساوی قطع کرو۔ ا اور ج مثلث کے دو راس ہیں اور اب صرف تیسرا راس ب دریافت کرنا باقی ہے جو پہلے بڑے دائرہ پر کہیں نہ کہیں واقع ہے۔

اب ب اور ج کے درمیان زاوئی فاصلہ ایک معلومہ مقدار ہے یعنی اِ کی دی ہوئی قیمت۔ اس لئے ب اس چھوٹے دائرہ پر واقع ہونا چاہئے جس کا مرکز ج اور نصف قطر اِ ہے۔ اس لئے مثلث بنانے کے لئے صرف اس چھوٹے دائرہ کا کھینچ لینا ضروری ہے کیونکہ ب، اس چھوٹے دائرہ اور بڑے دائرہ ا د اَ دَ کے نقاط تقاطع میں سے ایک یا دوسرا نقطہ ہونا چاہئے۔

عمل بالکل ناکام ہوگا جب دونوں بڑے دائرے ایک دوسرے کو قطع نہ کریں اور تب کسی مثلث کا مفروضہ عناصر کے ساتھ موجود ہونا ممکن نہیں

یہ بات اُس وقت واقع ہوتی ہے جبکہ چھوٹے دائرہ کا نصف قطر ا' بڑے دائرہ ا د اَ دَ سے نقطہ ج کے کم سے کم زاوئی فاصلہ سے چھوٹا ہو یا بڑے سے بڑے زاوئی فاصلہ سے بڑا ہو۔ اب ہم دفعہ ۶۸ سے یہ جانتے ہیں کہ اگر د ج و دَ وہ بڑا دائرہ ہو جو ج کو پہلے بڑے دائرہ کے قطب و سے ملاتا ہے اور اگر ج' و اور د کے درمیان واقع ہو تو ج د چھوٹی سے چھوٹی قوس ہے اور ج دَ بڑی سے بڑی قوس جو ج سے اِس دائرہ کے محیط تک کھینچی جا سکتی ہیں۔ د اور دَ پر کے زاوئے قائمہ ہیں اور مثلث ا ج د سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ جب ج د = جب ب جب ا اور ج د کے متمم ج دَ کی جیب کی قیمت بھی یہی ہے۔ پس کوئی حل نہ ہوگا اگر اِن دو متمم قوسوں میں سے (جنکی جیب جب ا ب جب اُ کے مساوی ہے) بڑی قوس سے ا' بڑا ہو یا چھوٹی قوس سے چھوٹا ہو' یا دوسرے الفاظ میں اگر جب ا' جب ب جب اُ سے چھوٹا ہو۔

اگر دائرے قطع کرتے ہیں مثلاً نقاط ب$_1$ اور ب$_2$ پر تو مثلث ا ب$_1$ ج' ا ب$_2$ ج ممکن ہے مطلوبہ حل ہوں یا ممکن ہے نہ ہوں یہ اس بات پر منحصر ہے کہ آیا یہ مثلث اس قید کی پابندی کرتے ہیں یا نہیں جو کروی مثلث کی تعریف میں شامل ہے یعنی آیا ہر ضلع نصف دائرہ سے کم ہے یا نہیں۔ اگر ضلع ا ب$_1$ دو قائمہ زاویوں سے کم ہو جبکہ اس کو قوسوں ا د اُ' اَ دَ اُ میں سے اس قوس پر ناپا جائے جو دئے ہوئے زاویہ ا کی ساق ہے تو ا ب$_1$ ج وہ مثلث ہے جو مفروضات کو پورا کرتا ہے' لیکن اگر قوس ا ب$_1$ نصف دائرہ سے بڑی ہو تو مثلث ا ب$_1$ ج مسئلہ کا حل نہیں ہے۔ ب$_2$ پر بھی یہی کسوٹی لگانی چاہیے۔

مثلاً شکل بالا میں اگر ا زاویہ حادہ ہو تو وہ' قوسوں ا ع اَ اور (۸۲)
ا د اَ کا درمیانی زاویہ ہے اور اس لئے ب$_1$ یا ب$_2$ سے صرف اُس وقت حل ملیگا جبکہ ب$_1$ یا ب$_2$' قوس ا د اَ پر واقع ہو۔ شکل میں ب$_1$ اور ب$_2$ دونوں اس شرط کو پورا کرتے ہیں اور اس لئے دو حل ہیں۔

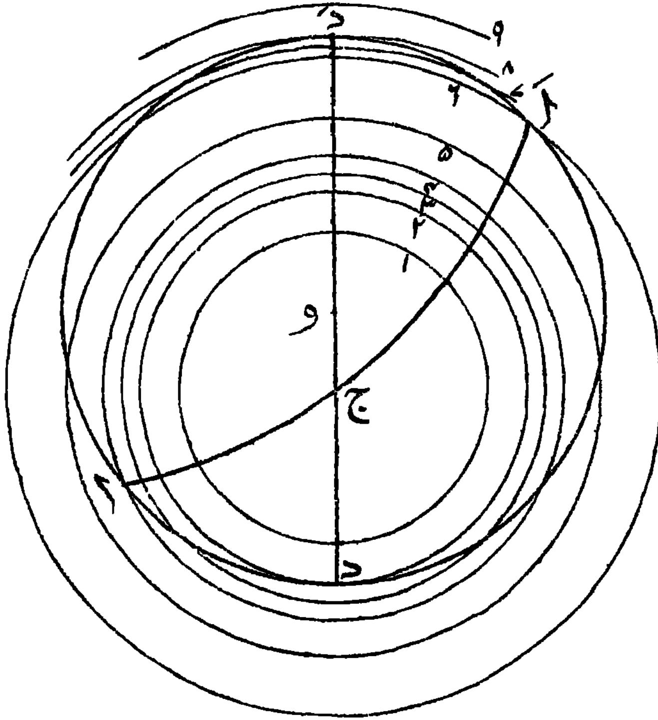
لیکن اگر بڑے اور چھوٹے دائروں کے نقاط تقاطع ایسے واقع ہوتے جیسے ب₃ اور ب₄ تو ب₃ سے حل حاصل ہوتا اور ب₄ سے نہیں۔ برخلاف اس کے اگر ا کی دی ہوئی قیمت منفرجہ ہو تو یہ زاویہ قوسوں ا ع اَ اور ا دَ اَ کا درمیانی زاویہ ہے اور اس لئے ب کے مقامات صرف اسوقت قابل قبول ہونگے جبکہ وہ قوس ا دَ اَ پر واقع ہوں۔ مثلاً اگر ب₃ اور ب₄ بڑے اور چھوٹے دائروں کے نقاط تقاطع ہوں تو صرف ایک حل ہے یعنے وہ جو ب₄ کے جواب میں ہے، اگر دائروں کے نقاط تقاطع ب₁ اور ب₂ ہوتے تو کوئی حل نہ ملتا کیونکہ اب یہ دونوں نقطے ناقابل قبول ہیں۔

اگر ب، ا پر منطبق ہوجائے تو مثلث معدوم ہوجاتا ہے۔ اگر ب، اَ پر منطبق ہوجائے، تو مثلث پھانک کی شکل اختیار کرتا ہے۔ ظاہر ہے کہ انہیں سے کوئی بھی حل کہلانے کا مستحق نہیں ہو سکتا۔ منطبق حل اس وقت واقع ہوتے ہیں جبکہ ب اور ب₂ دونوں قابل قبول ہوں اور ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں، یہ صورت اس وقت پیدا ہو گی جبکہ ا حادہ ہو اور ا، ج د کے مساوی ہو، یا ا منفرجہ ہو اور ا، ج دَ کے مساوی ہو۔ حلوں کی لا انتہا تعداد اس وقت ملیگی جبکہ بڑا اور چھوٹا دائرہ ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں یعنے جبکہ ج، د پر ہو اور ا قائمہ زاویہ ہو۔

اب شکل ذیل کے ذریعہ ہر صورت کا جو پیدا ہو سکتی ہے امتحان کرنا اور پھر حلوں کی تعداد جو قابل قبول ہوں معلوم کرنا آسان ہوگا۔

شکل میں باریک قلم سے کھینچے ہوے دائرے وہ چھوٹے دائرے ہیں جنکا مرکز ج اور نصف قطر ب ہے، یہ کل نو ہیں جو ب، کی نو مخصوص قیمتوں کے جواب میں ہیں اور نو مختلف صورتوں کی نمائندگی کرتے ہیں۔ ہر دائرہ کو ایک عدد سے تعبیر کیا گیا ہے اور اسی عدد کو نتائج کی فہرست میں چھوٹی قوسوں کے اندر متناظر صورت کے مقابل رکھا گیا ہے۔ کسی خاص صورت کیلئے ہمیں صرف وہ دائرہ دیکھنا ہوگا جو متناظر عدد کا حامل ہے اور پھر یہ دیکھنا ہوگا کہ

یہ دائرہ بڑے دائرہ اد اَدَ کو کتنے نقطوں پر قطع کرتا ہے اور کیا یہ نقطے اس مخصوص نصف دائرہ پر واقع ہیں جس پر ب کی قابل قبول قیمتیں واقع ہونی چاہئیں۔



(۱) فرض کرو کہ ب < ۹۰°

(ع) اگر ا < ۹°

ب کے قابل قبول مقامات اد اَ پر مقید ہیں۔

(۱) ا < ج د .... کوئی حل نہیں

(۲) ا = ج د .... دو منطبق حل

(۳) ا > ج دَ < ب .... دو حل

(۴،۵) ا ≥ ب ، < ۱۸۰° - ب ...... ایک حل

(۶، ۷، ۸، ۹) ا ≥ ۱۸۰° - ب .... کوئی حل نہیں

(۸۴) (ب) اگر ا = ۹۰°

ان صورتوں میں اَ د پر منطبق ہوتا ہے اور ج د = ب، ب کے قابل قبول مقامات نصف دائروں ا اَ میں سے کسی ایک پر واقع ہو سکتے ہیں لیکن دونوں پر نہیں۔

(۱، ۲، ۴) ا ≥ ب .... کوئی حل نہیں

(۵) ا > ب، < ۱۸۰° - ب .... ایک حل

(۶، ۸، ۹) ا ≥ ۱۸۰° - ب .... کوئی حل نہیں

(ج) اگر ا > ۹۰°

ب کے قابل قبول مقامات صرف ا د اَ پر واقع ہوتے ہیں۔

(۱، ۲، ۳، ۴) ا ≥ ب .... کوئی حل نہیں

(۵، ۶) ا > ب، ≥ ۱۸۰° - ب .... ایک حل

(۷) ا > ۱۸۰° - ب، < ج دَ .... دو حل

(۸) ا = ج دَ .... دو منطبق حل

(۹) ا > ج دَ .... کوئی حل نہیں

(۲) فرض کرو کہ ب > ۹۰°

اس صورت میں ہم مثلث کے راس کو ا کی بجائے اَ پر لیتے ہیں۔ ب، قوس اَ ج ہے۔

نتائج کی فہرست جماعت (۱) میں ب کی بجائے ۱۸۰° - ب اور ۱۸۰° - ب کی بجائے ب درج کر کے حاصل کیجا سکتی ہے۔

(۳) فرض کرو کہ ب = ۹۰°

اس صورت میں قوسیں ج اَ، ج ا مساوی ہیں اور دائرے ۴، ۵، ۶ ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔ ا = ج د یا ج دَ بموجب اسکے کہ وہ حادہ ہو یا منفرجہ۔

(الف) اگر ا < ۹۰°

(۱) ا < ا .... کوئی حل نہیں
(۲) ا = ا .... دو منطبق حل
(۳) ا > ا′ < ۹۰° .... دو حل
(۴، ۵ وغیرہ) ا ≤ ۹۰° .... کوئی حل نہیں

(ب) اگر ا = ۹۰°

ج′ ، ۹ پر منطبق ہوتا ہے اور دائرے ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ بڑے دائرے پر منطبق ہوتے ہیں۔

(۱) ا < ۹۰° .... کوئی حل نہیں
(۲، ۸) ا = ۹۰° .... حلوں کی لاانتہا تعداد
(۹) ا > ۹۰° .... کوئی حل نہیں

(ج) اگر ا > ۹۰° (۸۵)

(۱، ۶) ا ≥ ب .... کوئی حل نہیں
(۷) ا > ب′ < ا .... دو حل
(۸) ا = ا .... دو منطبق حل
(۹) ا > ا .... کوئی حل نہیں

جماعت (۳) کی صورت میں ایک علیحدہ شکل بنائی جائے تو مفید ہوگا۔

۸ ا ا ــــ غیر قائم الزاویہ مثلثوں کے حل کی آخری صورت میں جو ابہام واقع ہوتے ہیں ان کو پہلی صورت کے ابہامات سے قطبی مثلث کے ذریعہ اخذ کیا جا سکتا ہے۔

امثلہ نمبری (۶)

(۱) ایک مثلث کے اضلاع ۵۰ ۱۰°، ۹۰° اور ۷۵° ہیں۔ سب زاویوں کی جیوب معلوم کرو۔

(۲) ثابت کرو کہ سس ½ ا سس ½ ب = جب (س − ج) / جب س ۔ مثلث کو

حل کرو جبکہ ایک ضلع، متصلہ زاویہ، اور باقی دو ضلعوں کا مجموعہ دئے جائیں۔

(۳) مثلث کو حل کرو اگر اس کا ایک ضلع، متصلہ زاویہ، اور باقی دو زاویوں کا مجموعہ دئے جائیں۔

(۴) ایک مثلث میں دو ضلعوں کا مجموعہ نصف محیط کے مساوی ہے۔ اِس قوس کو معلوم کرو جو راس سے قاعدہ کے نقطۂ تنصیف تک کھینچی گئی ہے۔

(۵) اگر ا، ب، ج معلوم ہوں اور ج ربع ہو تو زاویوں کی تعیین کرو۔ نیز ثابت کرو کہ اگر ج پر اس کے مقابل کے زاویے سے عمود ض ہو تو جم² ض = جم² ا + جم² ب۔

(۶) اگر کروی مثلث کے ایک ضلع کو چار مساوی حصوں میں تقسیم کیا جائے اور ط¹، ط²، ط³ بترتیب وہ زاویے ہوں جو اِن حصوں کے محاذی مقابل راس پر بنتے ہیں تو ثابت کرو کہ

جب (ط¹ + ط²) جب ط² جب ط³ = جب (ط² + ط³) جب ط¹ جب ط²

(۷) ایک کروی مثلث میں اگر ا = ب = ۲ج تو ثابت کرو کہ

۸ جب² ½ ج (جم س + جب ½ ج) جم ½ ج = جم ا

(۸) ایک کروی مثلث میں اگر ا = ب = ۲ج تو ثابت کرو کہ

۸ جب (ا + ½ ج) جب² ½ ج جم ½ ج = جب³ ا

(۹) اگر متساوی الساقین مثلث ا ب ج کے مساوی ضلعوں کو قوس د ع سے تنصیف کیا جائے اور ب ج قاعدہ ہو تو ثابت کرو کہ (۴۷)

جب ½ د ع = ½ جب ½ ب ج قط ½ ا ج

(۱۰) اگر ج۱، ج۲ تیسرے ضلع کی دو قیمتیں ہوں جبکہ ا، ا، ب دئے گئے ہوں اور مثلث مبہم ہو تو ثابت کرو کہ

مس ½ ج۱ مس ½ ج۲ = مس ½ (ب − ا) مس ½ (ب + ا)

امثلہ نمبر (۷)

حسب ذیل صورتوں میں مثلث کو حل کرو۔

(۱) مفروضات ج = ۹۰°، ا = ۱۳۸° ۴′، ب = ۱۰۹° ۱۴′

جواب ج = ۱۱۳° ۲۸′ ۲″، ا = ۱۴۲° ۱۱′ ۳۸″، ب = ۱۲۰° ۱۵′ ۵۷″

(۲) مفروضات ج = ۹۰°، ا = ۱۳۱° ۳۰′، ب = ۱۲۰° ۳۲′

جواب ج = ۱۰۹° ۴۰′ ۲۰″، ا = ۱۲۷° ۱۷′ ۵۱″، ب = ۱۱۳° ۴۹′ ۳۱″

(۳) مفروضات ا = ۷۶° ۳۵′ ۳۶″، ب = ۵۰° ۱۰′ ۳۰″، ج = ۴۰° ۰′ ۱۰″

جواب ا = ۱۲۱° ۳۶′ ۲۰″، ب = ۴۲° ۱۵′ ۱۲″، ج = ۳۴° ۱۵′ ۳″

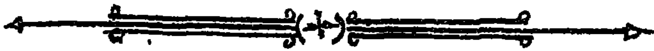
(۴) مفروضات ا = ۱۲۹° ۵′ ۲۸″، ب = ۱۴۲° ۱۲′ ۴۲″، ج = ۱۰۵° ۸′ ۱۰″

جواب ا = ۱۳۵° ۴۹′ ۲۰″، ب = ۱۴۴° ۳۰′ ۱۵″، ج = ۶۰° ۴′ ۵۴″

(۵) مثلث کو حل کرو جبکہ اسکے دو ضلع اور ان کے مقابل کے زاویوں کا مجموعہ دئے جائیں۔

(۶) مثلث کو حل کرو جبکہ ضلعوں کا مجموعہ، دو زاویوں کا مجموعہ اور تیسرا زاویہ دئے جائیں۔

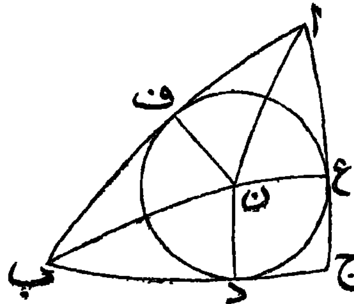
(۷) مثلث کو حل کرو جبکہ ضلعوں کا مجموعہ اور دو زاوئے دئے جائیں۔



چھٹا باب

بیرونی اور اندرونی دائرے

۱۱۹ ــ اندرونی دائرہ ۔ دئے ہوئے مثلث کے اندرونی چھوٹے دائرہ کا زاوئی نصف قطر معلوم کرنا ۔



فرض کرو کہ دیا ہوا مثلث ا ب ج ہے ۔ زاویوں ا اور ب کی تنصیف قوسوں ب ن اور ا ن سے کرو جو ن پر ملتی ہیں ۔ ن سے ن د، ن ع، ن ف، ضلعوں پر عمود کھینچو ۔

چونکہ مثلثات ن ع ا اور ن ف ا میں ع اور ف پر کے زاوئے قائمہ ہیں، ا پر ان کے زاوے مساوی ہیں، اور ضلع ن ا مشترک ہے

اس لئے یہ دونوں مثلث ہر طرح آپس میں برابر ہیں۔ اسی طرح مثلثات ن ف ب اور ن د ب ہر طرح برابر ہیں۔ اس لئے ن ع = ن ف = ن د

اور چونکہ مثلثات ن ج د اور ن ج ع میں د اور ع پر اپنے زاوئے قائمہ ہیں، ضلع ن ج مشترک ہے، اور ن د، ن ع مساوی ہیں اس لئے یہ دونوں مثلث ہر طرح آپس میں برابر ہیں۔ اسلئے ن ج، زاویہ ج کی تنصیف کرتا ہے۔

(۴۸) اس طرح مثلث ا ب ج کے زاویوں کو داخلاً تنصیف کرنیوالی قوسین مشترک نقطہ ن میں سے گذرتی ہیں اور ن سے اضلاع پر عمود وار کھینچی ہوئی قوسیں ن د، ن ع، ن ف سب طول میں برابر ہیں۔ اس طول کو ہم ر سے تعبیر کرینگے۔

اس لئے وہ چھوٹا دائرہ جس کا قطب ن اور نصف قطر ر ہے مثلث کے ضلعوں کو نقاط د، ع، ف پر مس کرتا ہے اور اس لئے اسکو

مثلث کا اندرونی دائرہ کہتے ہیں۔

مثلثوں کے مساوی ہونے سے جنکا ثبوت ہم دے آئے ہیں یہ مستنبط ہوتا ہے کہ ا ع = ا ف، ب ف = ب د، ج د = ج ع، اس لئے ب ج + ا ف = مثلث کے ضلعوں کے مجموعہ کا نصف = س، اور ا ف = س - ا

اب مس ن ف = مس ن ا ف جب ا ف (دفعہ ۳۲)

پس مس ر = مس ½ ا جب (س - ا) ...... (۱)

مس ر کی قیمت مختلف شکلوں میں بیان کیجا سکتی ہے، مثلاً دفعہ ۵۰ سے حاصل ہوگا

$$\text{مس}\ \frac{1}{2}\text{ا} = \sqrt{\frac{\text{جب (س - ب) جب (س - ج)}}{\text{جب س جب (س - ا)}}},$$

(۱) میں اس قیمت کو مندرج کیا جائے تو

$$\text{مس ر} = \sqrt{\frac{\text{جب(س-ا) جب(س-ب) جب(س-ج)}}{\text{جب س}}}$$

$$= \frac{\text{ن}}{\text{جب س}} \quad \text{(دفعہ ۵)} \quad \ldots\ldots (۲)$$

نیز دفعہ ۵ کے ضابطہ (۱۱) سے $\text{جب(س-ا)} = \frac{\text{جب ا جب ½ب جب ½ج}}{\text{جب ½ا}}$

اور اسی طرح جب (س - ب) اور جب (س - ج) کے لئے متناظر جملے حاصل ہونگے۔ اس لئے (۱) سے

$$\text{مس ر} = \frac{\text{جب ½ب جب ½ج}}{\text{جم ½ا}} \text{جب ا} \quad \ldots\ldots (۳)$$

پس دفعہ ۸۵ سے

$$\text{مس ر} = \frac{\sqrt{\{\text{-جم س جم(س-ا) جم(س-ب) جم(س-ج)}\}}}{\text{۲ جم ½ا جم ½ب جم ½ج}}$$

$$= \frac{\text{ن}}{\text{۲ جم ½ا جم ½ب جم ½ج}} \quad \ldots\ldots (۴)$$ [له]

یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ

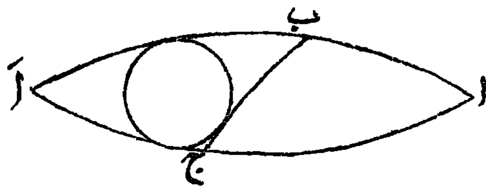
$$\text{۴ جم ½ا جم ½ب جم ½ج} = \text{جم س + جم (س - ا)} \text{ + جم (س-ب) + جم (س-ج)}$$ (۸۹)

اس لئے (۴) سے

$$\text{مم ر} = \frac{1}{\text{۲ن}} \{\text{جم س + جم (س-ا) + جم (س - ب)} \text{ + جم (س-ج)}\} \quad \ldots\ldots (۵)$$

له Lexell (Acta petropolitana, 1782)

۱۲۰ ۔ جانبی دائرے ۔ اُس چھوٹے دائرہ کا زاوی نصف قطر معلوم کرنا جو دئے ہوئے مثلث کے ایک ضلع کو اور باقی دو ممدودہ ضلعوں کو مس کرے ۔



فرض کرو کہ مثلث ا ب ج دیا ہوا مثلث ہے اور فرض کرو کہ ہم اس چھوٹے دائرہ کا نصف قطر معلوم کرنا چاہتے ہیں جو ضلع ب ج اور اضلاع ا ب اور ا ج ممدودہ کو مس کرتا ہے ۔ ا ب اور ا ج کو اتنا خارج کرو کہ وہ نقطہ اَ پر ملیں ۔ تو گویا مثلث اَ ب ج کے اندرونی چھوٹے دائرہ کا نصف قطر مطلوب ہے جس کے اضلاع علی الترتیب ا ، π ۔ ب ، π ۔ ج ہیں ۔ پس اگر ر مطلوبہ نصف قطر ہو اور س سے حسب معمول $\frac{1}{2}$ (ا + ب + ج) تعبیر ہو تو دفعہ ۱۱۹ سے

مس ر = مس $\frac{1}{2}$ ا جب س ۔۔۔۔۔۔۔ (۶)

اس نتیجہ سے ہم دوسری مماثل شکلیں پچھلے دفعہ کی طرح اخذ کر سکتے ہیں یا اُس دفعہ کی شکلوں سے استفادہ کر سکتے ہیں یہ ذہن میں رکھ کر کہ مثلث اَ ب ج کے زاویے ا ، π ۔ ب ، π ۔ ج ہیں ۔ پس $\frac{1}{2}$ (ا + ب + ج) کو س اور $\frac{1}{2}$ (ا + ب + ج) کو س تعبیر کرے تو

$$\text{مس ر}_1 = \sqrt{\frac{\text{جب س جب (س - ب) جب (س - ج)}}{\text{جب (س - ا)}}} = \frac{\text{ن}}{\text{جب (س - ا)}} \quad \ldots (۷)$$

$$\text{مس ر}_1 = \frac{\text{جم } \tfrac{1}{2}\text{ب جم } \tfrac{1}{2}\text{ج}}{\text{جم } \tfrac{1}{2}\text{ا}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۸)$$

$$\text{مس ر}_1 = \frac{\sqrt{\{-\text{جم س جم (س - ا) جم (س - ب) جم (س - ج)}\}}}{\text{۲ جم } \tfrac{1}{2}\text{ا جب } \tfrac{1}{2}\text{ب جب } \tfrac{1}{2}\text{ج}}$$ (۹٠)

$$= \frac{\text{ن}}{\text{۲ جم } \tfrac{1}{2}\text{ا جب } \tfrac{1}{2}\text{ب جب } \tfrac{1}{2}\text{ج}} \quad \ldots\ldots\ldots (۹)$$

$$\text{مس ر}_1 = \frac{1}{\text{۲ن}}\{\text{جم س} - \text{جم (س - ا)} + \text{جم (س - ب)} + \text{جم (س - ج)}\} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

یہ نتیجے بلاواسطہ بھی معلوم کئے جا سکتے تھے، اس طرح کہ مثلث اَ ب ج کے دو زاویوں کی تنصیف کرکے چھوٹے دائرہ کا قطب معلوم کیا جاتا اور پھر دفعہ ۱۱۹ کی طرح عمل کیا جاتا۔

۱۲۱ — وہ دائرہ جو مثلث کے ایک ضلع کو اور باقی دو ممدودہ ضلعوں کو مس کرتا ہے **جانبی دائرہ** کہلاتا ہے، اس لئے ہر دیئے ہوئے مثلث کے تین جانبی دائرے ہوتے ہیں۔ ج ا اور ا ب کو مس کرنے والے جانبی دائروں کے نصف قطر علی الترتیب ر_2 اور ر_3 سے تعبیر ہو سکتے ہیں، اور مس ر_2 اور مس ر_3 کی قیمتیں مس ر_1 کی قیمت میں زاویوں اور ضلعوں کو تعبیر کرنے والے حروف کی مناسب تبدیلیوں سے معلوم ہو سکتی ہیں۔

پچھلے دفعہ میں مثلث اَ ب ج کو ا ب اور ا ج کے خارج کرنے سے تاکہ وہ مکرر اَ پر ملیں حاصل کیا گیا تھا۔ اسی طرح دوسرا مثلث ب ج اور ب ا کو خارج کرنے سے تاکہ وہ مکرر ملیں حاصل کیا جا سکتا ہے، اور تیسرا مثلث، ج ا اور ج ب کو خارج کرنے سے تاکہ وہ مکرر ملیں

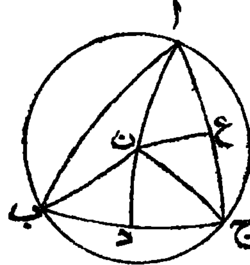
حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یہ تین مثلث، مثلث ا ب ج کے ہم پہلو کی مثلث ہیں۔ ابتدائی مثلث ا ب ج اور اس کے ہم پہلو کی تین مثلثوں کو ہم ائتلافی مثلث کہینگے جہاں ا ب ج بنیادی مثلث ہے۔ اس طرح دئے ہوئے مثلث کے اندرونی و باہری دائرے دراصل ائتلافی مثلثوں کے نظام کے اندرونی دائرے ہیں جنمیں سے دیا ہوا مثلث بنیادی مثلث ہے

۱۲۲ ـ بیرونی دائرہ ـ دئے ہوئے مثلث کے بیرونی یا حائط دائرہ کا زاوی نصف قطر معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ ا ب ج دیا ہوا مثلث ہے۔ اضلاع ج ب، ج ا کو د اور ع پر تنصیف کرو اور د اور ع سے علی الترتیب ج ب اور ج ا کے علی القوائم قوسیں کھینچو۔ فرض کرو کہ یہ قوسیں ن پر ملتی ہیں تو ا ب ج کے گرد ایک چھوٹا دائرہ کھینچا جا سکتا ہے جسکا قطب ن ہے (۹۱)

اس کو ثابت کرنے کے لئے قوسیں ن ا، ن ب، ن ج کھینچو۔

اب مثلثات ن ع ا اور ن ع ج میں چونکہ ع پر کے زاوئے قائمہ ہیں، ضلع ن ع مشترک ہے، اور اضلاع ع ا، ع ج مساوی ہیں اسلئے یہ دونوں مثلث ہر طرح آپس میں برابر ہیں۔ اسی طرح مثلثات ن د ب اور ن د ج ہر طرح ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔ پس ن ا = ن ج = ن ب



اگر ا ب کا وسطی نقطہ ف ہو تو مثلثات ن ف ا، ن ف ب کے

متناظر اضلاع ایک دوسرے کے مساوی ہیں ۔ اسلئے زاوئے ن ف ا '
ن ف ب ایک دوسرے کے مساوی ہیں اور اس لئے قائمہ ہیں ۔

پس مثلث ا ب ج کے اضلاع کو علی القوائم تنصیف کرنیوالی قوسیں ایک مشترک نقطہ ن میں سے گذرتی ہیں اور ن کو راسوں سے ملانیوالی قوسیں ن ا ' ن ب ' ن ج سب طول میں برابر ہیں ۔ اس طول کو ہم ر سے تعبیر کرینگے ۔

وہ چھوٹا دائرہ جس کا قطب ن اور نصف قطر ر ہو مثلث کے راسوں میں سے گذرتا ہے اور اس لئے ہم اسکو مثلث کا بیرونی دائرہ کہینگے ۔
مثلثوں کے مساوی ہونے سے جنکا ثبوت اوپر دیا جاچکا ہے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ
∠ن ب ج = ∠ن ج ب ' ∠ن ج ا = ∠ن ا ج ' ∠ن ا ب = ∠ن ب ا ۔ اس لئے ∠ن ج ب + ا = $\frac{1}{2}$ (ا + ب + ج) = س
اور ∠ن ج ب = س − ا

اب مس ج د = مس ج ن جم ن ج د (دفعہ ۷۳)

پس مس $\frac{1}{2}$ ا = مس ر جم (س − ا)

(۹۲) اس لئے مس ر = $\frac{\text{مس } \frac{1}{2} \text{ ا}}{\text{جم (س − ا)}}$ .... (۱۱)

مس ر کی قیمت مختلف اشکال میں بیان کیجا سکتی ہے ۔ مثلاً دفعہ ۵۶ سے مس $\frac{1}{2}$ ا کی قیمت درج کیجائے تو

مس ر = $\sqrt{\frac{\text{− جم س}}{\text{جم (س − ا) جم (س − ب) جم (س − ج)}}}$ = − $\frac{\text{جم س}}{\text{ن}}$
.... (۱۲)

نیز دفعہ ۵۶ کے ضابطہ (۲۹) سے

جم (س − ا) = $\frac{\text{جب ا}}{\text{جم } \frac{1}{2} \text{ ا}}$ جم $\frac{1}{2}$ ب جم $\frac{1}{2}$ ج

اور اسی طرح کے ضابطے جم $\frac{1}{2}$ ب اور جم $\frac{1}{2}$ ج کے لئے ۔ اسلئے (۱۱) سے

مس ر = جب ½ ا ÷ (جب ا جم ½ ب جم ½ ج) .... (۱۳)

اس میں دفعہ (۱۵) سے جب ا کی قیمت رکھنے سے

مس ر = ۲ جب ½ ا جب ½ ب جب ½ ج ÷ √{جب س جب (س - ا) جب (س - ب) جب (س - ج)}

= ۲ جب ½ ا جب ½ ب جب ½ ج ÷ ن ...... (۱۴)[1]

یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ

۴ جب ½ ا جب ½ ب جب ½ ج = جب (س - ا) +
جب (س - ب) + جب (س - ج) - جب س

اس لئے ضابطہ (۱۴) سے

مس ر = ۱/۲ن {جب (س - ا) + جب (س - ب) + جب (س - ج) - جب س}
(۱۵) ....

۱۲۳ — دئے ہوئے بنیادی مثلث کے اتصالی مثلثات کے بیرونی دائروں کے نصف قطر معلوم کرنا۔

اب اور اج کو خارج کرو تاکہ وہ پھر نقطہ اَ پر ملیں۔ فرض کرو کہ مثلث اَب ج کے بیرونی دائرہ کا نصف قطر ر۱ ہے۔ اسی طرح فرض کرو کہ اس طور پر بنے ہوئے دوسرے دو مثلثوں کے بیرونی دائروں کے نصف قطر ر۲ اور ر۳ ہیں۔

(۹۳) اب ہم مس ر۱، مس ر۲ اور مس ر۳ کی قیمتیں دفعہ ۱۲۲ میں مس ر کی محصلہ قیمتوں سے اخذ کر سکتے ہیں۔ مثلث اَب ج

[1] Lexell, loc. cit Cf. Gudermann, Niedere Spharik, 181

کے اضلاع ا، π - ب، π - ج اور اس کے زاویے ا، π - ب، π - ج ہیں۔ پس اگر س = ½ (ا + ب + ج) اور س = ½ (ا + ب + ج) تو دفعہ ۱۲۲ سے

$$\text{مس ر}_1 = \frac{\text{مس}\,\frac{1}{2}\,\text{ا}}{-\text{جم س}} \quad \ldots\ldots (۱۶)$$

$$\text{مس ر}_1 = \sqrt{\frac{\text{جم (س - ا)}}{-\text{جم س جم (س - ب) جم (س - ج)}}} = \frac{\text{جم (س - ا)}}{\text{ن}} \quad \ldots\ldots (۱۷)$$

$$\text{مس ر}_1 = \frac{\text{جب}\,\frac{1}{2}\,\text{ا}}{\text{جب ا جب}\,\frac{1}{2}\,\text{ب جب}\,\frac{1}{2}\,\text{ج}} \quad \ldots\ldots (۱۸)$$

$$\text{مس ر}_1 = \frac{۲\,\text{جب}\,\frac{1}{2}\,\text{ا جم}\,\frac{1}{2}\,\text{ب جم}\,\frac{1}{2}\,\text{ج}}{\sqrt{\text{جب س جب (س - ا) جب (س - ب) جب (س - ج)}}} \quad \ldots (۱۹)$$

$$\text{مس ر}_1 = \frac{1}{۲\,\text{ن}} \left\{ \text{جب س} - \text{جب (س - ا)} + \text{جب (س - ب)} + \text{جب (س - ج)} \right\} \quad \ldots\ldots (۲۰)$$

اسی طرح ہم مس ر۲ اور مس ر۳ کی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں۔

۱۲۴ — پچھلے ضابطوں کے اطلاقات۔ بہت سی ایسی مثالیں تجویز کی جا سکتی ہیں جو ائتلافی مثلثات کے بیرونی و اندرونی دائروں کے خواص پر مشتمل ہوں۔ ہم یہاں صرف ایک مثال پر اکتفا کرتے ہیں جو آئندہ کار آمد ہوگی۔

ثابت کرو کہ

$$(\text{مم ر} + \text{مس ر}_1)^2 = \frac{1}{۴\,\text{ن}^2} (\text{جب ا} + \text{جب ب} + \text{جب ج})^2 - ۱ \quad \ldots\ldots (۲۱)$$

ہم جانتے ہیں کہ

۴ ن۲ = ۱ ـ جم۲ ا ـ جم۲ ب ـ جم۲ ج + ۲ جم ا جم ب جم ج ....(۲۲)

اس لئے

(جب ا + جب ب + جب ج)۲ ـ ۴ ن۲

= ۲ (ا + جب ب جب ج + جب ج جب ا + جب ا جب ب
ـ جم ا جم ب جم ج)

نیز

مم ر + مس ر = ۱/۲ن {جب س + جب (س ـ ا) + جب (س ـ ب)
+ جب (س ـ ج)} ......(۲۳)

اس مساوات کی طرفین کا مربع لینے سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہو جائیگا کیونکہ (۹۴)

جب س + جب (س ـ ا) + جب (س ـ ب) + جب (س ـ ج)

= ۲ [جم ۱/۲ ا جب ۱/۲ (ب + ج) + جب ۱/۲ ا جم ۱/۲ (ب ـ ج)]

اور اس کا مربع

= (ا + جم ا) {ا ـ جم (ب + ج)} + (ا ـ جم ا) {ا + جم (ب ـ ج)}
+ ۲ جب ا (جب ب + جب ج)

= ۲ (ا + جب ب جب ج + جب ج جب ا + جب ا جب ب
ـ جم ا جم ب جم ج)

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

(مم را ـ مس را)۲ = ۱/۴ن۲ (جب ب + جب ج ـ جب ا)۲ ـ ۱
..........(۲۴)

۱۲۵ ـ دفعہ ۱۱۹ کی شکل میں یہ فرض کرو کہ د ن کو ن میں سے نقطہ ا تک خارج کیا گیا ہے اتنا کہ د ا ربع کے مساوی ہے، تب اَ ب ج کا

ایک قطب ہے اور ن ا = ½ π - ر۔ اسی طرح فرض کرو کہ ن میں سے ع ن کو نقطہ ب تک اور ف ن کو نقطہ ج تک خارج کیا گیا ہے اتنا کہ ع ب اور ف ج ربعات ہیں۔ تب ا ب ج ' ا ب ج کا قطبی مثلث ہے اور ن ا = ن ب = ن ج = ½ π - ر۔ اس لئے ن اُس چھوٹے دائرہ کا قطب ہے جو قطبی مثلث کے گرد کھینچا گیا ہے اور قطبی مثلث کے بیرونی دائرہ کا زاوئی نصف قطر ابتدائی مثلث کے اندرونی دائرہ کے زاوئی نصف قطر کا متمم ہے۔ اسی طرح قطبی مثلث کے اندرونی چھوٹے دائرہ کا قطب ابتدائی مثلث کے بیرونی چھوٹے دائرہ کا بھی قطب ہے اور ان دونوں دائروں کے زاوئی نصف قطر ایک دوسرے کے متمم ہیں۔

امثلہ نمبری (۸)

امثلہ ذیل میں اس باب کی ترقیم قائم رکھی گئی ہے۔

کسی مثلث میں ثابت کرو کہ ا تا ۱۱ امثالوں میں درج شدہ رشتے درست ہیں

۱۔ مس ر۱ مس ر۲ مس ر۳ = مس ر جب۲ س

۲۔ مس ر۱ + مم ر = مس ر۲ + مم ر۱ = مس ر۳ + مم ر۲ = مس ر + مم ر۳

= ½ (مم ر + مم ر۱ + مم ر۲ + مم ر۳)

۳۔ مس۲ ر + مس۲ ر۱ + مس۲ ر۲ + مس۲ ر۳ = مم۲ ر + مم۲ ر۱ + مم۲ ر۲ + مم۲ ر۳ (۹۵)

۴۔ $\dfrac{\text{مس ر}_1 + \text{مس ر}_2 + \text{مس ر}_3 - \text{مس ر}}{\text{مم ر}_1 + \text{مم ر}_2 + \text{مم ر}_3 - \text{مم ر}}$ = ½ (۱ + جم ا + جم ب + جم ج)

۵ — قم^2 ر = مم (س - ب) مم (س - ج) + مم (س - ج) مم (س - ا)
+ مم (س - ا) مم (س - ب)

۶ — قم^2 ر$_1$ = مم (س - ب) مم (س - ج) - مم س مم (س - ب)
- مم س مم (س - ج)

۷ — مس ک مس ک$_1$ مس ک$_2$ مس ک$_3$ = مس ک قط^2 س

۸ — مس ک = $\frac{1}{2}$ (مم ر$_1$ + مم ر$_2$ + مم ر$_3$ - مم ر)

۹ — مم ر = $\frac{1}{2}$ (مس ک$_1$ + مس ک$_2$ + مس ک$_3$ - مس ک)

۱۰ — مس ک مس ک$_1$ + مس ک$_2$ مس ک$_3$ = مم ر مم ر$_1$ + مم ر$_2$ مم ر$_3$

۱۱ — مس ک مس ک$_1$ مس ک$_2$ مس ک$_3$ = $\frac{4}{\text{جب}^2 ا\ \text{جب}^2 ب\ \text{جب}^2 ج}$ = $\frac{1}{ن^2}$

۱۲ — مم ر مم ر$_1$ مم ر$_2$ مم ر$_3$ = $\frac{4}{\text{جب}^2 ب\ \text{جب}^2 ج\ \text{جب}^2 ا}$ = $\frac{1}{ن^2}$

۱۳ — ایک مثلث متساوی الساقین میں ثابت کرو کہ مس م = ۲ مس ر

۱۴ — اگر ا ب ج متساوی الساقین مثلث ہو، ن اسکے بیرونی دائرہ کا قطب اور ف کرہ پر کا کوئی نقطہ تو ثابت کرو کہ

جم ف ا + جم ف ب + جم ف ج = ۳ جم ن ا جم ن ف

۱۵ — اگر ایک کروی مثلث ا ب ج میں جس کا ہر زاویہ ۱۲۰° ہے تین چھوٹے دائرے کھینچے جائیں ایسے کہ ہر دائرہ دوسرے دو دائروں کو اور مثلث کے دو ضلعوں کو مس کرے تو ثابت کرو کہ ہر چھوٹے دائرہ کا نصف قطر = ۳۰° اور تینوں چھوٹے دائروں کے مراکز قطبی مثلث کے راسوں پر منطبق ہوتے ہیں۔

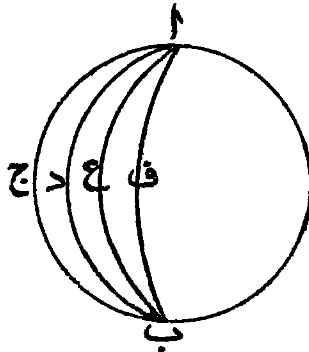
۱۶ — مثلث کو حل کرو جبکہ اندرونی دائرہ کا نصف قطر اور دو زاوے دئے جائیں ۔

۱۷ — مثلث کو حل کرو جبکہ بیرونی دائرہ کا نصف قطر اور دو ضلع دئے جائیں۔

ساتواں باب

کروی مثلث کا رقبہ۔ کروی اضافہ (۹۶)

۱۲۶ - پھانک کا رقبہ معلوم کرنا۔



فرض کرو کہ ا ج ب د ا ، ا د ب ع ا دو پھانکیں ہیں جو ابر مساوی زاوئے بناتی ہیں، تب ان میں سے کوئی ایک پھانک دوسری پر رکھی ہوئی فرض کیجا سکتی ہے اس طور پر کہ وہ اس پر ٹھیک ٹھیک منطبق ہو جائے، اس طرح جن پھانکوں کے زاوئے مساوی ہوں وہ ایک دوسرے کے مساوی ہوتی ہیں۔ اب اقلیدس جلد ششم کے پہلے مسئلہ میں جو طریقۂ عمل ہے اس کے مشابہ طریقہ سے ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ

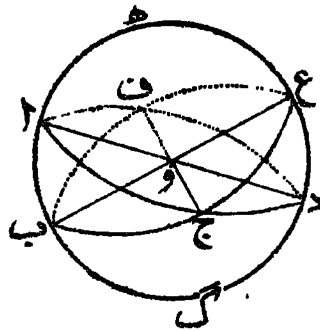
پھانکیں اپنے زاویوں کے متناسب ہوتی ہیں ۔ پس چونکہ کرہ کی سطح کو ایک ایسی پھانک کی منحنی سطح خیال کیا جا سکتا ہے جسکا زاویہ چار قائمہ زاویوں کے مساوی ہے اس لئے اگر کسی پھانک کا زاویہ دائری ناپ میں ا ہو تو

$$\frac{\text{پھانک کا رقبہ}}{\text{کرہ کی سطح}} = \frac{ا}{۲\pi}$$

فرض کرو کہ کرہ کا نصف قطر ر ہے تو اس کی سطح کا رقبہ = $۴\pi ر^۲$ (۹۷)
(دیکھو مصنف کا (Integ. Cal.) باب ہفتم)، پس

$$\text{پھانک کا رقبہ} = \frac{ا}{۲\pi}\,۴\pi ر^۲ = ۲ ا ر^۲ \quad ......(۱)$$

۱۲۷ ۔ جیرارڈ کا مسئلہ[1] ۔ کروی مثلث کا رقبہ معلوم کرنا ۔



[1] اس مسئلہ کو Girard نے اپنی تصنیف Invention nouvelle en Algebra میں جو امسٹرڈم میں ۱۶۲۹ء میں طبع ہوئی تھی درج کیا ہے لیکن اسکا ثبوت مدلل نہیں ہے اسی لئے یہ مسئلہ Cavalieri سے منسوب کیا جاتا ہے جس نے اسکا باقاعدہ ثبوت اپنی تصنیف Directorium Generale Uranometricum میں دیا ہے جو Bologona میں ۱۶۳۲ء میں طبع ہوئی تھی ۔

فرض کرو کہ اب ج ایک کروی مثلث ہے، ضلعوں کو بنانے والی قوسوں کو اتنا خارج کرو کہ ان میں سے دو دو ایک دوسرے سے ٹکرا رہیں۔ یہ اس وقت واقع ہوگا جبکہ ہر ممدودہ ضلع نصف محیط کے مساوی ہو جائے۔ اب مثلث اب ج تین پھانکوں اب د ج ا، ب ج ع اب اور ج ا ف ب ج کا ایک حصہ ہے۔ مثلثات ج د ع اور ف اب، ویپر کے متناظر مجسم زاویوں کے محاذی ہیں اور ہم یہ مان لینگے کہ ان کے رقبے مساوی ہیں۔ اس لئے پھانک ج ا ف ب ج، مثلثات اب ج اور ج د ع کے مجموعہ کے مساوی ہے۔ پس اگر ا، ب، ج سے مثلث کے زاویوں کے دائری ناپ تعبیر ہوں تو

مثلث اب ج + ب گ د ج = پھانک اب د ج ا = ۲ ا $ر^2$

مثلث اب ج + اھ ع ج = پھانک ب ج ع اب = ۲ ب $ر^2$

مثلث اب ج + مثلث ج د ع = پھانک ج ا ف ب ج = ۲ ج $ر^2$

پس جمع کرنے سے (۹۸)

مثلث اب ج کا دوچند + نصف کرہ کی سطح = ۲ (ا + ب + ج) $ر^2$

اس لئے مثلث اب ج = (ا + ب + ج − π) $ر^2$ .....(۲)

کروی اضافہ۔ ہم جملہ ا + ب + ج − π کو مثلث کا کروی اضافہ کہینگے اور چونکہ

(ا + ب + ج − π) $ر^2$ = $\frac{\text{ا + ب + ج} - \pi}{4\pi}$ 4π $ر^2$

اسلئے جو نتیجہ حاصل ہوا ہے اس کو اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے: **کروی مثلث کا رقبہ کرہ کی سطح کی وہی کسر ہے جو کروی اضافہ کو آٹھ قائمہ زاویوں سے ہے۔**

۱۲۸ ۔ ہم نے دفعہ ماسبق میں یہ مان لیا ہے کہ مثلثات ج د ع اور ف ا ب کے رقبے مساوی ہیں۔ مگر یہ مثلث متماثل نہیں ہیں بلکہ متناظراً مساوی ہیں (دفعہ ۳۲) کیونکہ ایک مثلث کو دوسرے مثلث پر اٹھا کر رکھنے سے ان کو ایک دوسرے پر منطبق نہیں کیا جا سکتا۔ لیکن ایسے دو مثلثوں کو ٹکڑوں میں توڑ کر جو ایک دوسرے پر منطبق ہو سکیں آسانی کے ساتھ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ان مثلثوں کے رقبے مساوی ہیں۔ چنانچہ ہر مثلث کے گرد چھوٹا بیرونی دائرہ کھینچو۔ اب چونکہ مثلثوں کے عناصر وہی ہیں ان دائروں کے زاوئی نصف قطر دفعہ ۲۲ کی رو سے مساوی ہیں۔ اگر اس بیرونی دائرہ کا قطب ہر مثلث کے اندر واقع ہو تو ہر مثلث تین متساوی الساقین مثلثوں کا مجموعہ ہے اور اگر قطب ہر مثلث کے باہر واقع ہو تو ہر مثلث اس اضافہ کے مساوی ہے جو دو متساوی الساقین مثلثوں کو تیسرے پر ہے۔ لیکن ہر صورت میں ایک جفت کے متساوی الساقین مثلثات دوسرے جفت کے متناظر متساوی الساقین مثلثات کے مساوی ہیں کیونکہ متساوی الساقین مثلثات کی صورت میں متماثل اور متناظراً مساوی ہونے کا فرق اٹھ جاتا ہے۔

۱۲۹ ۔ کروی کثیر الاضلاع کا رقبہ معلوم کرنا ۔ فرض کرو کہ کثیر الاضلاع کے ضلعوں کی تعداد ن اور اس کے زاویوں کا مجموعہ م ہے کثیر الاضلاع کے اندر کوئی نقطہ لو اور اس کو راسوں سے ملاؤ۔ تب شکل ن مثلثات میں (۹۹)
تقسیم ہو جاتی ہے۔ اب دفعہ ۱۲۷ کی رو سے

کثیر الاضلاع کا رقبہ = (مثلثات کے زاویوں کا مجموعہ ـ ن π) ر²

لیکن مثلثات کے زاویوں کا مجموعہ م اور چار زاویہ قائموں کے مجموعہ کے مساوی ہے جو مشترک راس پر بنتے ہیں۔ اس لئے

کثیر الاضلاع کا رقبہ = {م ـ (ن ـ ۲) π} ر² ․ ․ ․ ․ ․ ․ ․ (۴)

یہ جملہ اسوقت بھی درست رہتا ہے جبکہ کثیر الاضلاع کے چند زاویے دو

قائموں سے بڑے ہوں بشرطیکہ اس قسم کا کثیرالاضلاع ایسے مثلثوں میں تقسیم ہو سکے جن کے زاویوں میں سے ہر زاویہ دو قائموں سے کم ہو۔

۱۳۰ - تعریف - کروی کثیرالاضلاع کا **کروی اضافہ** وہ اضافہ ہے جو کثیرالاضلاع کے زاویوں کے مجموعہ کو مستوی کثیرالاضلاع کے زاویوں کے مجموعہ پر ہے جسمیں اضلاع کی تعداد وہی ہو۔

نتیجہ بالا (۳) سے معلوم ہوتا ہے کہ کروی کثیرالاضلاع کا رقبہ اپنے کروی اضافہ کے متناسب ہوتا ہے[۱]۔

۱۳۱ - اب ہم مثلث کے **کروی اضافہ** کے چند مثلثی تفاعلوں کے لئے جملے دریافت کرینگے۔ ہم کروی اضافہ کو ع سے تعبیر کرینگے یعنے ع = ا + ب + ج - π اور دفعہ ۵۶ کی ترقیم کے مطابق یہ دیکھ لینا سب زیادہ اہم ہے کہ

$$س = \frac{1}{2} ع + \frac{1}{2} \pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

کروی اضافہ کی ہندسی تعبیر آئندہ باب میں ملے گی، دفعہ ۱۴۹۔

۱۳۲ - کاگنولی (Cagnoli) **کا مسئلہ[۲] ثابت کرو کہ**

$$جب \frac{1}{2} ع = \frac{\{جب س جب (س - ا) جب (س - ب) جب (س - ج)\}^{\frac{1}{2}}}{2 جم \frac{1}{2} ا جم \frac{1}{2} ب جم \frac{1}{2} ج} \quad (10)$$

دفعہ ۵۶ میں نصف ضلعوں کی جیوب اور جیوب التمام کے لئے جو

[۱] دیکھو ۲۰ Gauss, Disq. circa Superficies Curvas, §

[۲] Cagnoli, Trigonometria, § 1146 - نیز دیکھو Lexell, Acta petrop. 1782 صفحہ ۶۸ -

جملے حاصل کئے گئے ہیں اِن کے استعمال سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{\text{جب ج جب }\frac{1}{2}\text{ ا جب }\frac{1}{2}\text{ ب}}{\text{جم }\frac{1}{2}\text{ ج}} = \sqrt{\text{جم}^{2}\text{ س}} = -\text{جم س} = \text{جب }\frac{1}{2}\text{ ع} \qquad \ldots\ldots(5)$$

جذرالمربع کی علامت منفی لی گئی ہے اس وجہ سے کہ دائیں طرف کے جملے کے تمام اجزائے ضربی مثبت ہیں لیکن جم س لازماً منفی ہے کیونکہ س، $\frac{1}{2}\pi$ سے بڑا اور $\frac{3}{2}\pi$ سے چھوٹا ہے (دفعہ ۳۲)۔

اب

$$\text{جب ج} = \frac{2\text{ ن}}{\text{جب ا جب ب}} = \frac{\text{ن}}{2\text{ جب }\frac{1}{2}\text{ ا جم }\frac{1}{2}\text{ ا جب }\frac{1}{2}\text{ ب جم }\frac{1}{2}\text{ ب}} \quad \text{(دفعہ ۵۱)}$$

اور اس لئے

$$\text{جب }\frac{1}{2}\text{ ع} = \frac{\text{ن}}{2\text{ جم }\frac{1}{2}\text{ ا جم }\frac{1}{2}\text{ ب جم }\frac{1}{2}\text{ ج}} \qquad \ldots\ldots(6)$$

اور یہی ثابت کرنا تھا۔

اسی طرح یہ معلوم ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{جب ج جم }\frac{1}{2}\text{ ا جم }\frac{1}{2}\text{ ب}}{\text{جم }\frac{1}{2}\text{ ج}} = \text{جم(س - ج)} = \text{جب(ج - }\frac{1}{2}\text{ ع)}$$

جس میں آخری جیب کا لازمی طور پر مثبت ہونا مان لیا گیا ہے۔ اسلئے

$$\text{جب(ج - }\frac{1}{2}\text{ ع)} = \frac{\text{ن}}{2\text{ جب }\frac{1}{2}\text{ ا جب }\frac{1}{2}\text{ ب جم }\frac{1}{2}\text{ ج}} \qquad \ldots\ldots(7)$$

۱۳۲۔ جب(ج - $\frac{1}{2}$ ع) کے لئے یہ ضابطہ دوسرے طریقے سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ وہ اس طرح کہ ہم بچانی مثلث ا ب ج پر کاگنولی کا مسئلہ استعمال کیا جائے۔ اگر ہم اس مثلث کے عناصر کو زبر زدہ حروف سے تعبیر کریں تو

$$\left.\begin{array}{l} \text{اَ} = \pi - \text{ا، بَ} = \pi - \text{ب، جَ} = \text{ج} \\ \text{اَ} = \pi - \text{ا، بَ} = \pi - \text{ب، جَ} = \text{ج} \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots(8)$$

جس سے

$$\left.\begin{array}{l} \bar{س} = \pi - (س - ج)، \bar{س} - \bar{ا} = س - ب، \bar{س} - \bar{ب} = س - ا، \bar{س} - \bar{ج} = \pi - س \\ \bar{ن} = ن \\ \bar{ع} = ۲ ج - ع \end{array}\right\} \ldots (۹)$$

سکاگنولی کے ضابطہ میں ان قیمتوں کے اندراج سے پچھلے دفعہ کا نتیجہ (۷) حاصل ہوتا ہے۔

یہ ذہن نشین رہے کہ $\bar{ع}$ چونکہ کروی اضافہ ہے اس لئے مثبت (۱۰۱)
اور ۲ π سے کم ہے، پس ج $- \frac{۱}{۲}$ ع مثبت اور π سے کم ہے۔ یہی وجہ
ہے کہ ہم نے دفعہ ماسبق میں ج $- \frac{۱}{۲}$ ع کو مثبت قرار دیا تھا۔

۱۳۴ ۔ لی ہولر (L'Huilier) کا مسئلہ[۱]۔ ثابت کرو کہ

$$مس\ \frac{۱}{۴} ع = \sqrt{مس\ \frac{۱}{۲} س\ مس\ \frac{۱}{۲}(س - ا)\ مس\ \frac{۱}{۲}(س - ب)\ مس\ \frac{۱}{۲}(س - ج)}$$

$$مس\ \frac{۱}{۴} ع = \frac{جب\ \frac{۱}{۴}(ا + ب + ج - \pi)}{جم\ \frac{۱}{۴}(ا + ب + ج - \pi)}$$

$$= \frac{جب\ \frac{۱}{۲}(ا + ب) - جب\ \frac{۱}{۲}(\pi - ج)}{جم\ \frac{۱}{۲}(ا + ب) + جم\ \frac{۱}{۲}(\pi - ج)}$$

$$= \frac{جب\ \frac{۱}{۲}(ا + ب) - جم\ \frac{۱}{۲} ج}{جم\ \frac{۱}{۲}(ا + ب) + جب\ \frac{۱}{۲} ج}$$

$$= \frac{جم\ \frac{۱}{۲}(ا - ب) - جم\ \frac{۱}{۲} ج}{جم\ \frac{۱}{۲}(ا + ب) + جم\ \frac{۱}{۲} ج} \times \frac{جم\ \frac{۱}{۲} ج}{جب\ \frac{۱}{۲} ج} \quad \text{(دفعہ ۶۳)}$$

اس لئے دفعہ ۵۰ سے

$$مس\ \frac{۱}{۴} ع = \sqrt{\frac{جب\ \frac{۱}{۴}(ج + ا - ب)\ جب\ \frac{۱}{۴}(ج + ب - ا)}{جم\ \frac{۱}{۴}(ا + ب + ج)\ جم\ \frac{۱}{۴}(ا + ب - ج)}} \sqrt{\frac{جب\ س\ جب\ (س - ج)}{جب\ (س - ا)\ جب\ (س - ب)}}$$

$$= \sqrt{مس\ \frac{۱}{۲} س\ مس\ \frac{۱}{۲}(س - ا)\ مس\ \frac{۱}{۲}(س - ب)\ مس\ \frac{۱}{۲}(س - ج)} \ldots (۱۰)$$

---

[۱] L'Huilier (Legendre, Geometrie Note 10)

۱۳۵ ـ لی ہولر کے مسئلہ کا دوسرا ثبوت جو جنٹ (Gent) نے دیا ہے[1]۔ ڈلمبر کی پہلی اور تیسری تمثیلات (دفعہ ۶۳) اشکال ذیل میں لکھی جا سکتی ہیں :-

$$\frac{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ج}-\text{ع})}{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ج}}=\frac{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ع}}\quad\ldots\ldots(11)$$

$$\frac{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{ج}-\text{ع})}{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ج}}=\frac{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})}{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ع}}\quad\ldots\ldots(12)$$

(۱۱) سے ہم اخذ کرتے ہیں

$$\frac{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ج}-\text{ع})-\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ج}}{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ج}-\text{ع})+\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ج}}=\frac{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب})-\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ج}}{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب})+\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ج}}$$

اور اس کو ہم

$$\text{مس}\,\tfrac{1}{4}\,\text{ع}\ \text{مس}\,\tfrac{1}{4}(2\,\text{ج}-\text{ع})=\text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{س}-\text{ا})\ \text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{س}-\text{ب})\quad\ldots\ldots(13)$$

کی شکل میں رکھ سکتے ہیں۔

(۱۰۲) مساوات (۱۲) پر بھی اسی طرح کا عمل کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$\text{مس}\,\tfrac{1}{4}\,\text{ع}\ \text{مم}\,\tfrac{1}{4}(2\,\text{ج}-\text{ع})=\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\,\text{س}\ \text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{س}-\text{ج})\quad\ldots\ldots(14)$$

اب (۱۳) اور (۱۴) کی متناظر طرفین کو ضرب دیکر جذر المربع لو تو نتیجہ لی ہولر کا ضابطہ ہوگا

$$\text{مس}\,\tfrac{1}{4}\,\text{ع}=\sqrt{\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\,\text{س}\ \text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{س}-\text{ا})\ \text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{س}-\text{ب})\ \text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{س}-\text{ج})}\quad\ldots\ldots(15)$$

نیز (۱۳) کو (۱۴) سے تقسیم کریں اور جذر المربع لیں تو

---

[1] دیکھو Grunert's Archiv der Math. und Physik, XX, 1853 کا صفحہ ۳۵۸

۱۳۶ــ اگر ہم لی ہولر کا مسئلہ قطبی مثلث پر لگائیں جس کا کروی اضافہ $\text{۲}(\pi - \text{س})$[1] اور نصف گھیر $\pi - \frac{1}{2}\text{ع}$ ہے تو

$$\text{مم}\,\tfrac{1}{2}\text{س} = \sqrt{\text{مم}\,\tfrac{1}{4}\text{ع}\ \text{مس}\,\tfrac{1}{4}(\text{۲ا} - \text{ع})\ \text{مس}\,\tfrac{1}{4}(\text{۲ب} - \text{ع})\ \text{مس}\,\tfrac{1}{4}(\text{۲ج} - \text{ع})} \quad \ldots\ldots (\text{۱۷})$$

اور (۱۶) کے متناظر

$$\text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{س} - \text{ج}) = \sqrt{\text{مس}\,\tfrac{1}{4}\text{ع}\ \text{مس}\,\tfrac{1}{4}(\text{۲ا} - \text{ع})\ \text{مس}\,\tfrac{1}{4}(\text{۲ب} - \text{ع})\ \text{مم}\,\tfrac{1}{4}(\text{۲ج} - \text{ع})} \quad \ldots\ldots (\text{۱۸})$$

حاصل ہوتا ہے۔

یہ ضابطے راست ڈلمبر کی تیسری اور چوتھی تمثیلات سے بھی پچھلے دفعہ کے طریقہ کے مماثل طریقہ سے حاصل کئے جا سکتے تھے۔

۱۳۷ــ لولیری (Lhuilierian) ــ اگر ہم رکھیں

$$\text{ل} = \sqrt{\text{مم}\,\tfrac{1}{2}\text{س}\ \text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{س} - \text{ا})\ \text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{س} - \text{ب})\ \text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{س} - \text{ج})} \quad \ldots (\text{۱۹})$$

تو دفعہ ۱۳۵ کی مساوات (۱۵) لکھی جا سکتی ہے

$$\text{مس}\,\tfrac{1}{4}\text{ع} = \frac{\text{ل}}{\text{مم}\,\tfrac{1}{2}\text{س}} \quad \ldots\ldots (\text{۲۰})$$

اور دفعہ ۱۳۵ کی مساوات (۱۶) لکھی جا سکتی ہے

$$\text{مس}\,\tfrac{1}{4}(\text{۲ج} - \text{ع}) = \frac{\text{ل}}{\text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{س} - \text{ج})} \quad \ldots\ldots (\text{۲۱})$$

اسی طرح

لہ کسی شکل کے رقبہ اور اسکی متکافی شکل کے گھیرے میں جو ربط ہوتا ہے اسکو Schulz نے Sphärik, II کے صفحہ ۲۴۱ میں بیان کیا ہے۔

مس ۱/۴ (۲ ا - ع) = ل / مس ۱/۲ (س - ا) .... (۲۲)

اور مس ۱/۴ (۲ ب - ع) = ل / مس ۱/۲ (س - ب) .... (۲۳)

اب (۲۰) تا (۲۳) مساواتوں کو باہم ضرب دو تو

(۲۴) ل^۲ = مس ۱/۴ ع مس ۱/۴ (۲ ا - ع) مس ۱/۴ (۲ ب - ع) مس ۱/۴ (۲ ج - ع)

ڈاکٹر کے سی (Casey) کی رائے ہے کہ تفاعل ل کو مثلث کا Lhuilierian کہا جائے جس کو ہم لولیری کہینگے۔ وہ یہ بھی بتاتا ہے کہ ل کی دو گونہ قیمت (ضوابط ۱۹ اور ۲۴) کا یہ فائدہ ہے کہ اس سے کروی مثلث کا حل معلوم کیا جا سکتا ہے جبکہ تین ضلع یا تین زاوئے دئے جائیں۔ ہر صورت میں مساواتیں (۲۰)، (۲۱)، (۲۲) اور (۲۳) استعمال ہونگی۔

۱۳۸ - کاگنولی کے مسئلہ کا دوسرا ثبوت جو پرُوہٹ (Prouhet) نے دیا ہے[۱]۔ دفعہ ۱۳۵ کی مساواتیں (۱۱) اور (۱۲) اشکال ذیل میں لکھی جا سکتی ہیں:-

جم ۱/۲ ج جم ۱/۲ ع + جب ۱/۲ ج جب ۱/۲ ع = (جم ۱/۲ (ا - ب) / جم ۱/۲ ج) جم ۱/۲ ج

جب ۱/۲ ج جم ۱/۲ ع - جم ۱/۲ ج جب ۱/۲ ع = (جم ۱/۲ (ا + ب) / جم ۱/۲ ج) جب ۱/۲ ج

اِن سے جب ۱/۲ ع اور جم ۱/۲ ع کی قیمتیں معلوم کرو تو

جب ۱/۲ ع = جب ۱/۲ ج جم ۱/۲ ج قط ۱/۲ ج {جم ۱/۲ (ا - ب) - جم ۱/۲ (ا + ب)}

= جب ج جب ۱/۲ ا جب ۱/۲ ب قط ۱/۲ ج ..... (۲۵)

[۱] Nouvelles Annales de Mathematiques, 1st Series, XV, 1856 کا صفحہ ۹۱۔

$$= \frac{\text{ن}}{\text{۲ جم}\,\frac{1}{2}\,\text{ا جم}\,\frac{1}{2}\,\text{ب جم}\,\frac{1}{2}\,\text{ج}}$$ ، دفعہ ۱۳۲ کے مطابق

نیز

$$\text{جم}\,\frac{1}{2}\,\text{ع} = \left\{\text{جم}\,\frac{1}{2}\,(\text{ا}+\text{ب})\,\text{جب}^2\,\frac{1}{2}\,\text{ج} + \text{جم}\,\frac{1}{2}\,(\text{ا}-\text{ب})\,\text{جم}^2\,\frac{1}{2}\,\text{ج}\right\}\text{قط}\,\frac{1}{2}\,\text{ج}$$

$$= \left\{\text{جم}\,\frac{1}{2}\,\text{ا جم}\,\frac{1}{2}\,\text{ب} + \text{جب}\,\frac{1}{2}\,\text{ا جب}\,\frac{1}{2}\,\text{ب جم ج}\right\}\text{قط}\,\frac{1}{2}\,\text{ج}$$

لہ (۲۶) ....

$$= \frac{(\text{۱}+\text{جم ا})(\text{۱}+\text{جم ب}) + \text{جب ا جب ب جم ج}}{\text{۴ جم}\,\frac{1}{2}\,\text{ا جم}\,\frac{1}{2}\,\text{ب جم}\,\frac{1}{2}\,\text{ج}}$$

$$= \frac{\text{۱}+\text{جم ا}+\text{جم ب}+\text{جم ج}}{\text{۴ جم}\,\frac{1}{2}\,\text{ا جم}\,\frac{1}{2}\,\text{ب جم}\,\frac{1}{2}\,\text{ج}} \quad \text{.......... (۲۷)}$$ ٢ه

$$= \frac{\text{جم}^2\,\frac{1}{2}\,\text{ا} + \text{جم}^2\,\frac{1}{2}\,\text{ب} + \text{جم}^2\,\frac{1}{2}\,\text{ج} - \text{۱}}{\text{۲ جم}\,\frac{1}{2}\,\text{ا جم}\,\frac{1}{2}\,\text{ب جم}\,\frac{1}{2}\,\text{ج}} \quad \text{.......... (۲۸)}$$

(۲۵) اور (۲۶) سے بذریعہ عمل تقسیم (۱۰۴)

$$\text{مس}\,\frac{1}{2}\,\text{ع} = \frac{\text{جب}\,\frac{1}{2}\,\text{ا جب}\,\frac{1}{2}\,\text{ب جب ج}}{\text{جم}\,\frac{1}{2}\,\text{ا جم}\,\frac{1}{2}\,\text{ب} + \text{جب}\,\frac{1}{2}\,\text{ا جب}\,\frac{1}{2}\,\text{ب جم ج}} \quad \text{...... (۲۹)}$$

اور (۲۵) اور (۲۷) سے

$$\text{مس}\,\frac{1}{2}\,\text{ع} = \frac{\text{۲ ن}}{\text{۱}+\text{جم ا}+\text{جم ب}+\text{جم ج}} \quad \text{...... (۳۰)}$$ ٣ه

لہ لگرانج Journal de l'Ecole-Polytechnique کا باب ششم ۔ یعنی بذریعہ علم ہندسہ ثبوت کے لئے دفعہ ۱۵۰ اور Gudermann کی کتاب Niedere Spharik کا دفعہ ۱۵۲ دیکھو

٢ه یولر Acta Petropolitana, 1778

٣ه De Gua (Memoires de l Academie des Sciences, Paris, 1783).

۱۳۹ — دوسرے ضابطے۔ ہم دوسرے اور ضابطے معلوم کرسکتے ہیں جنمیں کروی اضافہ کے نصفی تفاعیل شامل ہوں۔ مثلاً

جب $\tfrac{1}{4}$ ع اور جم $\tfrac{1}{4}$ ع معلوم کرنا۔

(۲۸) میں جم $\tfrac{1}{2}$ ع کی بجائے ۱ − ۲ جب^2 $\tfrac{1}{4}$ ع رکھو تو

$$\text{جب}^2\tfrac{1}{4}\text{ع} = \frac{1+2\,\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ا}\,\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب}\,\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج} - \text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{ا} - \text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{ب} - \text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{ج}}{4\,\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ا}\,\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب}\,\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج}}$$

کسر کے شمار کنندہ کو معمولی طور پر مختصر کرکے ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ یہ شمار کنندہ

$$= 4\,\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{س}\,\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{س}-\text{ا})\,\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{س}-\text{ب})\,\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{س}-\text{ج})$$

اس لئے

$$\text{جب}^2\tfrac{1}{4}\text{ع} = \frac{\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{س}\,\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{س}-\text{ا})\,\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{س}-\text{ب})\,\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{س}-\text{ج})}{\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ا}\,\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب}\,\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج}} \quad \ldots\ldots\ldots(۳۱)$$

اسی طرح

$$\text{جم}^2\tfrac{1}{4}\text{ع} = \frac{\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{س}\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{س}-\text{ا})\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{س}-\text{ب})\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{س}-\text{ج})}{\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ا}\,\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب}\,\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج}} \quad \ldots(۳۲)$$

ان سے بذریعہ عمل تقسیم لی ہولر کا مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔

۱۴۰ — جم (ج − $\tfrac{1}{2}$ ع) معلوم کرنا۔

(۲۸) میں ہم پہانکی مثلث کے عناصر جو (۸) اور (۹) میں دئے گئے ہیں درج کرو تو

$$\text{جم}(\text{ج}-\tfrac{1}{2}\text{ع}) = \frac{\text{جب}^2\tfrac{1}{2}\text{ا} + \text{جب}^2\tfrac{1}{2}\text{ب} + \text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{ج} - 1}{2\,\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ا}\,\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ب}\,\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج}}$$

$$= \frac{\text{جم}^2 \tfrac{1}{2}\text{ج} - \text{جم}^2 \tfrac{1}{2}\text{ا} - \text{جم}^2 \tfrac{1}{2}\text{ب} + 1}{2\,\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ا}\,\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ب}\,\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج}} \quad \ldots\ldots (۳۳)$$

(۱۰۵) اس سے یا باہم بیانی مثلث کے عناصر کو (۳۱) اور (۳۲) میں مندرج کرنے سے یہ بھی معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{جب}^2\left(\tfrac{1}{2}\text{ج} - \tfrac{1}{4}\text{ع}\right) = \frac{\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{س}\,\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{س}-\text{ا})\,\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{س}-\text{ب})\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{س}-\text{ج})}{\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ا}\,\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ب}\,\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج}} \quad \ldots\ldots (۳۴)$$

$$\text{جم}^2\left(\tfrac{1}{2}\text{ج} - \tfrac{1}{4}\text{ع}\right) = \frac{\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{س}\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{س}-\text{ا})\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{س}-\text{ب})\,\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{س}-\text{ج})}{\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ا}\,\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ب}\,\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج}} \quad \ldots\ldots (۳۵)$$

نیز (۶) اور (۷) سے بذریعہ عمل تقسیم ضابطہ

$$\text{مم}\tfrac{1}{2}\text{ع} = \text{مم}\,\text{ج} + \frac{\text{مم}\tfrac{1}{2}\text{ا}\,\text{مم}\tfrac{1}{2}\text{ب}}{\text{جب}\,\text{ج}} \quad \ldots\ldots (۳۶)$$

حاصل ہوتا ہے جو (۲۹) کی دوسری شکل ہے۔

۱۴۱۔ کروی اضافہ محسوب کرنا۔ کروی مثلث کے عنصروں میں سے جب تین کی قیمتیں دیجائیں تو کروی اضافہ اور اس لئے مثلث کا رقبہ بھی راست مفروضات سے تین صورتوں میں محسوب کئے جا سکتے ہیں یعنی

(۱) جب تینوں زاوئے دئے جائیں

(۲) جب تینوں ضلع دئے جائیں۔ اس صورت میں لی ہولر کا ضابطہ استعمال کیا جاتا ہے۔

(۳) جب دو ضلع اور ان کا درمیانی زاویہ دئے جائیں۔ اس صورت میں ضابطہ (۲۹) استعمال کیا جاتا ہے اور اس کو لوگارتھموں کیلئے موزوں بنایا جا سکتا ہے اگر ایک امدادی زاویہ فہ لیا جائے ایسا کہ

مس فہ = مس ½ ا جم ج .... (۳۷)

اب ضابطہ (۲۹) کی شکل ہو جاتی ہے

مس ½ ع = (جب ½ ب مس ج جب فہ) / (جم (فہ − ½ ب)) ...... (۳۸)

امثلہ نمبری (۹)

۱ — ایک متساوی الاضلاع مثلث کے ضلع اور زاویے معلوم کرو جبکہ اس کا رقبہ اُس کرہ کے رقبہ کا ¼ ہو جس پر یہ مثلث بنایا گیا ہے۔

۲ — ایک متساوی الاضلاع اور متساوی الزوایا کروی کثیر الاضلاع کی سطح معلوم کرو جس کے ضلعوں کی تعداد ن ہے۔ اور اس کے ہر زاویہ کی قیمت معلوم کرو جبکہ اس کی سطح کرہ کی سطح کا نصف ہو۔

۳ — اگر ا = ب = ⅓ π اور ج = ½ π تو ثابت کرو کہ ع = جم⁻¹ (۷/۹) (۱۰۶′)

۴ — اگر کروی مثلث ا ب ج کا زاویہ ج قائمہ ہو تو ثابت کرو کہ

جب ½ ع = جب ½ ا جب ½ ب قط ½ ج ، جم ½ ع = جم ½ ا جم ½ ب قط ½ ج

۵ — اگر زاویہ ج قائمہ ہو تو ثابت کرو کہ

(جب² ج / جم ج) جم ع = (جب² ا / جم ا) + (جب² ب / جم ب)

۶ — اگر ا = ب اور ج = π/۲ تو ثابت کرو کہ مس ع = جب² ا / ۲ جم ا

۷ — ثابت کرو کہ ایک قائم الزاویہ مثلث میں زاویوں کا مجموعہ چار قائمہ زاویوں سے کم ہوتا ہے۔

۸ — ایک کروی مثلث کے ضلع میں ایک دیے ہوئے نقطہ سے بڑے دائرہ کی ایک قوس کھینچو جو مثلث کا ایک دیا ہوا حصہ قطع کرے۔

۹۔ اگر ایک کروی مثلث میں جم ج = مس $\frac{1}{2}$ ا مس $\frac{1}{2}$ ب تو ثابت کرو کہ ج = ا + ب

۱۰۔ اگر ایک کروی مثلث کے زاویوں کا مجموعہ چار قائموں کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم}^2 \tfrac{1}{2}\,\text{ا} + \text{جم}^2 \tfrac{1}{2}\,\text{ب} + \text{جم}^2 \tfrac{1}{2}\,\text{ج} = 1$$

۱۱۔ اگر نصف قطر ر کے کرہ پر $ر_1$، $ر_2$، $ر_3$ نصف قطر والے تین چھوٹے دائرے ہوں جو ایک دوسرے کو نقاط پ، ق، ر پر مس کرتے ہیں اور اگر انکے مرکزوں کو ملانے سے جو کروی مثلث بنتا ہے اس کے زاویے ا، ب، ج ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{رقبہ پ ق ر} = (\text{ا جم } ر_1 + \text{ب جم } ر_2 + \text{ج جم } ر_3 - \pi)\, ر^2$$

۱۲۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جب س} = \frac{\{\text{جب } \tfrac{1}{2}\text{ع جب}(\text{ا} - \tfrac{1}{2}\text{ع})\text{جب}(\text{ب} - \tfrac{1}{2}\text{ع})\text{جب}(\text{ج} - \tfrac{1}{2}\text{ع})\}^{\frac{1}{2}}}{2\,\text{جب } \tfrac{1}{2}\text{ا جب } \tfrac{1}{2}\text{ب جب } \tfrac{1}{2}\text{ج}}$$

۱۳۔ ایک منتظم کثیر الاضلاع کا رقبہ معلوم کرو جس کے ضلعوں کی تعداد دی گئی ہے اور جو کرہ کی سطح پر بڑے دائروں کی قوسوں سے بنایا گیا ہے۔ اسکے ذریعہ یہ اخذ کرو کہ اگر کسی چھوٹے دائرہ کا زاویائی نصف قطر ع ہو تو اس کے رقبہ کو کرہ کی کل سطح سے وہی نسبت ہوتی ہے جو (۱ − جم ع) کو ۲ سے ہے۔

۱۴۔ اگر کروی مثلث کے راس ا، ب، ج اور ان کے مقابل کے ضلعوں کے نقاط وسطی علی الترتیب اَ، بَ، جَ ہوں اور اگر مثلث کا کروی اضافہ ع ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم } \tfrac{1}{2}\text{ع} = \frac{\text{جم اَبَ}}{\text{جم } \tfrac{1}{2}\text{ج}} = \frac{\text{جم بَجَ}}{\text{جم } \tfrac{1}{2}\text{ا}} = \frac{\text{جم جَاَ}}{\text{جم } \tfrac{1}{2}\text{ب}}$$

۱۵۔ ایک کروی مثلث کے ضلعوں کے نقاط وسطی کو بڑے دائروں کی قوسوں سے ملایا گیا ہے۔ اگر ان قوسوں میں سے کوئی ایک قوس ربع کے

مساوی ہو تو ثابت کرو کہ دوسری دو قوسیں بھی ربع کے مساوی ہیں ۔

(۱۰۷) ## امثلہ نمبری (۱۰)

۱۔ اگر قطبی مثلث کا کروی اضافہ ش ہو اور ہم پہلو مثلثوں کے کروی اضافے $ع_1$، $ع_2$، $ع_3$ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس}\,\tfrac{1}{4}\,ش = \sqrt{\text{مس}\,\tfrac{1}{4}\,ع_1\ \text{مس}\,\tfrac{1}{4}\,ع_2\ \text{مس}\,\tfrac{1}{4}\,ع_3\ \text{مم}\,\tfrac{1}{4}\,ع}$$

(Prouhet)

۲۔ ثابت کرو کہ متساوی الاضلاع مثلث میں

$$\text{مس}\,\tfrac{1}{4}\,ع = \text{مس}\,\tfrac{1}{4}\,ا\ \sqrt{\text{مس}\,\tfrac{3}{4}\,ا\ \text{مس}\,\tfrac{1}{4}\,ا}$$

۳۔ اگر ایک متساوی الساقین مثلث کے مساوی ضلع ا اور ب ہوں تو

$$\text{مس}\,\tfrac{1}{4}\,ع = \text{مس}\,\tfrac{1}{4}\,ج\ \sqrt{\text{مس}\,\tfrac{1}{2}(ا + \tfrac{1}{2}ج)\ \text{مس}\,\tfrac{1}{2}(ا - \tfrac{1}{2}ج)}$$

۴۔ ثابت کرو کہ

$$\text{مس}\,\tfrac{1}{4}\,ع\ \text{مم}\,\tfrac{1}{2}(ا - \tfrac{1}{2}ع) = \text{مس}\,\tfrac{1}{2}\,س\ \text{مس}\,\tfrac{1}{2}(س - ا)$$

۵۔ مثلث کو حل کرو جبکہ دو ضلعوں کا مجموعہ، تیسرا ضلع اور کروی اضافہ دئے جائیں۔

۶۔ ایک متساوی الساقین قائم الزاویہ کروی مثلث کا رقبہ کرہ کی سطح کا $\frac{1}{12}$ ہے ۔ وتر معلوم کرو ۔ (R. U. E. 1898)

۷۔ ایک متساوی الاضلاع کروی مثلث کرہ کی سطح کا $\frac{1}{4}$ حصہ گھیرتا ہے۔ اس کا زاویہ معلوم کرو ۔
نیز ثابت کرو کہ اس کے دو خطوط وسطی اور ایک ضلع کا مجموعہ بڑے دائرہ کے

نصف محیط کے مساوی ہے۔ (R. U. I. 1895)

۸۔ ایک کروی مثلث ایسا ہے کہ اس کے بیرونی دائرہ کا مرکز اسکے قاعدہ میں واقع ہے اور اس کا زاویہ راس $\frac{3}{4}\pi$ ہے۔ اگر کرہ کا نصف قطر ایک فٹ ہو تو مثلث کا رقبہ مربع فٹوں میں معلوم کرو۔ (R. U. I. 1895)

۹۔ ایک منتظم کروی ذو اربعۃ الاضلاع کا ہر زاویہ ۱۰۰° ہے۔ اس کے رقبہ کو کرہ کے رقبہ سے جو نسبت ہے اُسے معلوم کرو۔

۱۰۔ ایک منتظم کروی کثیر الاضلاع کا رقبہ کرہ کی سطح کا پ واں حصہ ہے اور اس کے ضلعوں کی تعداد ن ہے۔ اس کے ضلع اور زاوئے معلوم کرو۔
(R. U. I 1893)

۱۱۔ ایک دی ہوئی پھانک دو متساوی الساقین مثلثوں میں تقسیم کیگئی ہے جنمیں سے ایک کا رقبہ دوسرے کا ن گنا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ا جم ط}=\text{مس}\left(\frac{\text{ن}-1}{\text{ن}+1}\right)\frac{\pi}{2}$$

جہاں ا پھانک کے زاوئے کو اور ط مساوی ضلعوں میں سے ایک ضلع کو تعبیر کرتا ہے۔

جم ط کی قیمت کی انتہا معلوم کرو جب ا لا انتہا چھوٹا ہو جائے اور اس سے ثابت کرو کہ کرہ کے ایک قطعہ کی سطح کو کرہ کی سطح سے وہی نسبت ہے جو قطعہ کے ارتفاع کو کرہ کے قطر سے ہے۔ (Sci. & Art, 1894.)

۱۲۔ کروی مثلث ا ب ج کے ضلع ا ب کی تنصیف نقطہ د پر کیگئی ہے۔ اگر ع۱ اور ع۲ مثلثات ا ج د اور ب ج د کے کروی اضافے ہوں تو ثابت کرو کہ (Sci. & Art, 1897.) (۱۰۸)

$$\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\text{ع}_1\ \text{جم}\ \tfrac{1}{2}\text{ب}=\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\text{ع}_2\ \text{جم}\ \tfrac{1}{2}\text{ا}$$

۱۳۔ اکائی نصف قطر کے کرہ پر ایک چھوٹا دائرہ کھینچا گیا ہے۔ اس

چھوٹے دائرہ میں ایک کروی ذو اربعۃ الاضلاع بنایا گیا ہے جس کے ضلع ا، ب، ج، د ہیں اور جس کا گھیرا ۲ ن اور رقبہ ۲ س ہے۔
ثابت کرو کہ

$$\text{جب}^2 \tfrac{1}{2}\text{س} = \frac{\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{ن}-\text{ا})\ \text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{ن}-\text{ب})\ \text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{ن}-\text{ج})\ \text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{ن}-\text{د})}{\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ا}\ \text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب}\ \text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج}\ \text{جم}\tfrac{1}{2}\text{د}}$$

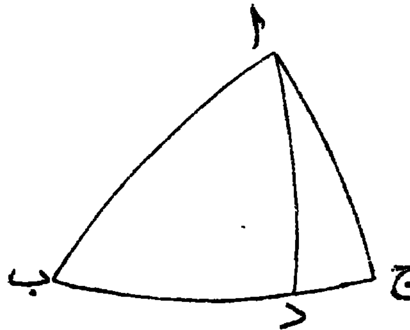
(Sci. & Art. 1898)

(۱۰۹)

آٹھواں باب

کروی مثلث کی مختلف خاصیتیں

۱۴۲۔ ارتفاع کی تعریف۔ قوس ا د جو راس ا سے مقابل ضلع پر عمود کھینچی گئی ہے اور جو اسکو نقطہ د پر قطع کرتی ہے مثلث کا ایک ارتفاع کہلاتی ہے۔



ارتفاعوں کی خاصیتیں۔ ایک ضلع کی جیب اور اس کے متناظر ارتفاع کی جیب کے حاصل ضرب کی قیمت وہی ہوتی ہے خواہ کوئی ضلع لیا جائے۔ اس قیمت کو ۲ن کہا جا سکتا ہے۔

ایک زاویہ کی جیب اور اسکے متناظر ارتفاع کی جیب کے حاصل ضرب کی قیمت وہی ہوتی ہے خواہ کوئی زاویہ لیا جائے

اس قیمت کو ۲ ن کہا جاسکتا ہے۔

ان مسائل کو ثابت کرنے میں ہم یہ دیکھتے ہیں کہ قائم الزاویہ مثلثات ادب، ادج میں

جب ج جب ب = جب اد = جب ب جب ج ....(۱)

پس (۱۱۰)

جب ا جب اد = جب ج جب ب ا جب ا = جب ا جب ب جب ج

= جب ب جب ج جب ا = ۲ ن ......(۲)

جب ا جب اد = جب ب جب ج جب ا = جب ج جب ا جب ب

= جب ا جب ب جب ج = ۲ ن .....(۳)

ان سے حسب ذیل مساواتیں اخذ ہوتی ہیں:-

جب ا جب ب جب ج / ۲ ن = جب ا / جب ا = جب ب / جب ب = جب ج / جب ج = ن / ن′ ....(۴)[1]

جب ا جب ب جب ج / ۲ ن′ = جب ا / جب ا = جب ب / جب ب = جب ج / جب ج = ن′ / ن ....(۵)[1]

ن′ = ۲ ن² / جب ا جب ب جب ج ، ن = ۲ ن′² / جب ا جب ب جب ج ....(۶)

اگر مساواتوں

۲ ن = جب ب جب ج جب ا

جم ا - جم ب جم ج = جب ب جب ج جم ا

سے ا ساقط کردیا جائے یعنی اگر ان مساواتوں کے مربع لیکر ان کو جمع کردیا جائے تو

---

[1] دیکھو Gudermann, Niedere Spharik, صفحہ ۱۴۲۔

۴ ن^۲ = جب^۲ ب جب^۲ ج - (جم ا - جم ب جم ج)^۲

= ۱ - جم^۲ ا - جم^۲ ب - جم^۲ ج + ۲ جم ا جم ب جم ج .... (۷)

= ۴ جب س جب (س - ا) جب (س - ب) جب (س - ج) ..... (۸)

اسی طرح

۴ ف^۲ = جب^۲ ب جب^۲ ج - (جم ا + جم ب جم ج)^۲

= ۱ - جم^۲ ا - جم^۲ ب - جم^۲ ج - ۲ جم ا جم ب جم ج .... (۹)

= - ۴ جم س جم (س - ا) جم (س - ب) جم (س - ج) ... (۱۰)

اس طرح ظاہر ہے کہ دفعہ ہذا کے ن اور ف فی الواقعی وہی ہیں جنکی دفعات ۱۵ اور ۸۵ میں تعریف ہو چکی ہے۔

۱۴۳ - کسی خط کا طول جو راس سے مقابل ضلع تک کھینچا جائے

فرض کرو کہ ضلع ب ج میں ف کوئی نقطہ ہے اور ا ف ملایا گیا ہے۔

فرض کرو کہ قوسوں ا ف، ب ف، ف ج کے طول علی الترتیب ف، ا۱، ا۲ سے اور زاویے ب ا ف، ف ا ج علی الترتیب ا۱، ا۲ سے تعبیر کئے گئے ہیں۔ (۱۱۱)

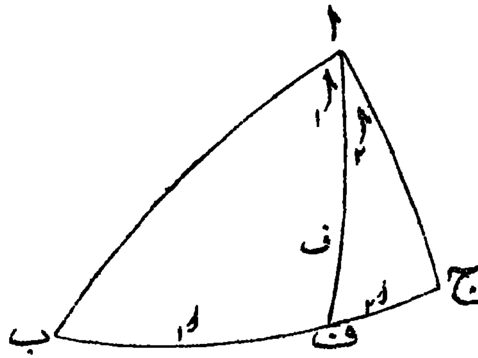
مثلثات ب ف ا، ج ف ا پر جیب التمامی ضابطہ استعمال کرنے سے

$$\text{جم ا}\hat{\text{ف}}\text{ب} = \frac{\text{جم ج - جم ا}_1\text{ جم ف}}{\text{جب ا}_1\text{ جب ف}}$$

$$= -\text{جم ا}\hat{\text{ف}}\text{ج} = \frac{\text{جم ا}_2\text{ جم ف - جم ب}}{\text{جب ا}_2\text{ جب ف}}$$

جس سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم ف} = \text{جم ب}\,\frac{\text{جب ا}_1}{\text{جب ا}} + \text{جم ج}\,\frac{\text{جب ا}_2}{\text{جب ا}} \quad .... (۱۱)$$



اس مساوات کی طرفین کو جب ف سے تقسیم کرو اور پھر بائیں طرف کے شمار کنندہ اور نسب نما کو جب ف سے ضرب دو تو

$$\text{مم ف} = \frac{\text{جم ب جب ا}_1\text{ جب ف} + \text{جم ج جب ا}_2\text{ جب ف}}{\text{جب ا جب ف جب ف}}$$

لیکن

$$\text{جب ا}_2\text{ جب ف} = \text{جب ج جب ا}_1$$

$$\text{جب ا}_1\text{ جب ف} = \text{جب ب جب ا}_2$$

$$\text{جب ا جب ف جب ف} = \text{جب ب جب ج جب ا}$$

اس لئے اِن قیمتوں کو مندرج کرنے سے

$$\text{مم ف} = \text{مم ب}\,\frac{\text{جب ا}_1}{\text{جب ا}} + \text{مم ج}\,\frac{\text{جب ا}_2}{\text{جب ا}} \quad \ldots\ldots (۱۲)$$

۱۴۴ — اِن ضابطوں کا فائدہ اِن کو چند خاص صورتوں پر استعمال کر کے واضح کیا جاتا ہے۔

(۱۱۲) **خط وسطی اور ایک زاویے کے ناصفوں کے طول۔**

(۱) فرض کرو کہ قوس ب ج کا نقطہ وسطی م ہے اور فرض کرو کہ م′ ا م کے طول کو تعبیر کرتا ہے جسکو ہم مثلث کا خط وسطی کہہ سکتے ہیں۔ ف کو م پر منطبق کرنے سے

$ا_۱ = \frac{۱}{۲} ا$ ، $ا_۲ = \frac{۱}{۲} ا$

اور اس لئے مساوات (۱۱) سے

جم م[1] $= \frac{۱}{۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} ا}$ (جم ب + جم ج) .... (۱۳)

(۲) فرض کرو کہ زاویہ ا کا داخلی ناصف ا ف ہے اور اس کا طول عا سے تعبیر ہوتا ہے۔

تب $ا_۱ = \frac{۱}{۲} ا$ ، اور مساوات (۱۲) سے

مم عا $= \frac{۱}{۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} ا}$ (مم ب + مم ج) .... (۱۴)

(۳) فرض کرو کہ زاویہ ا کا بیرونی ناصف ا ف ہے جہاں ف، ب ج ممدودہ میں واقع ہے اور فرض کرو کہ ا ف کا طول عاَ سے تعبیر ہوتا ہے۔ اس صورت میں $ا_۱ = \frac{۱}{۲} \pi + \frac{۱}{۲} ا$ ، $ا_۲ = -(\frac{۱}{۲}\pi - \frac{۱}{۲} ا)$ اور ضابطہ (۱۲) سے

مم عاَ $= \frac{۱}{۲ \text{ جب } \frac{۱}{۲} ا}$ (مم ب - مم ج) .... (۱۵)

۱۱۵۔ کسی بڑے دائرہ پر کے تین نقطوں کو کسی اور نقطے سے ملانے والی قوسوں کے درمیان ربط معلوم کرنا۔

دفعہ ۱۴۳ کے ضابطہ (۱۱) کو ہم ایسا ربط سمجھ سکتے ہیں جو ایک بڑے دائرہ پر کے تین نقطوں ب، ف، ج اور کرہ پر کے کسی دوسرے نقطہ ا کے زاویائی فاصلوں کے درمیان ہے۔ یہ ربط فی الواقع اس بات کی جانچ کرنے میں مستعمل ہو سکتا ہے کہ آیا دئے ہوئے تین نقطے ایک ہی بڑے دائرہ پر واقع ہیں یا نہیں۔

---

[1] دیکھو Gudermann, Niedere Sphärik کا دفعہ ۴۰۰۔

اگر ہم اس ربط کو اس نقطۂ نظر سے دیکھیں تو یہ ربط مسئلہ ذیل کے مماثل ہو جاتا ہے جس کے دعوے میں ہم نے نئی ترمیم داخل کی ہے تاکہ نتیجہ کی شکل متشاکل ہو۔

(۱۱۳) **اگر ایک بڑے دائرے پر تین نقطے لا 'ما' ے ہوں اور کرہ پر کوئی اور نقطۂ ن ہو تو**

جم ن لا جب ما ے + جم ن ما جب ے لا + جم ن ے جب لا ما = ۰

(۱۱ ر) ....

جہاں یہ تسلیم کیا گیا ہے کہ بڑے دائرہ پر ایک سمت میں ناپی ہوئی قوسیں مثبت ہیں اور دوسری سمت میں ناپی ہوئی منفی' اس طرح ما ے = - ے ما - ن لا' ن ما' ن ے کی جیوب التمام کی بجائے ہم اُن قوسوں کی جیوب استعمال کر سکتے ہیں جو لا 'ما' ے سے اس بڑے دائرے پر عمود کھینچی گئی ہیں جس کا قطب ن ہے' اور اس طرح ہمیں ایک ربط ملتا ہے جو ایک ہی بڑے دائرہ پر کے تین نقطوں سے کسی دوسرے بڑے دائرہ پر کھینچے ہوئے کروی عمودوں کے درمیان ہوتا ہے۔ ہم حاصل شدہ مسئلہ کو مکرر ایسی شکل میں بیان کرینگے کہ ہندسہ مستوی کے ایک مشہور مسئلہ سے اس کی مشابہت واضح ہو جائے اور اس کا ایسا ثبوت بھی دینگے جو دفعہ ۱۴۴ پر منحصر نہیں ہوگا۔

۱۴۶ ۔ اُن قوسوں کے درمیان ربط معلوم کرنا جو ایک بڑے دائرہ پر کے تین نقطوں سے دوسرے بڑے دائرہ پر عمود کھینچی گئی ہیں ۔

فرض کرو کہ نقطوں ن۱ اور ن۲ سے دو قوسیں ایک ثابت قوس پر

عمود کھینچی گئی ہیں، اور ن$_1$ اور ن$_2$ میں سے گذرنے والے بڑے دائرہ پر کے کسی نقطہ ن سے اسی ثابت قوس پر ایک اور عمود کھینچا گیا ہے۔ فرض کرو کہ ن ن$_1$ = ط$_1$، ن ن$_2$ = ط$_2$ اور فرض کرو کہ ن، ن$_1$ اور ن$_2$ سے کھینچے ہوئے عمود لا، لا$_1$ اور لا$_2$ ہیں، تب

$$\text{جب لا} = \frac{\text{جب ط}_2}{\text{جب (ط}_1\text{ + ط}_2\text{)}}\text{ جب لا}_1 + \frac{\text{جب ط}_1}{\text{جب (ط}_1\text{ + ط}_2\text{)}}\text{ جب لا}_2$$

فرض کرو کہ قوس ن$_2$ ن$_1$، محدودہ بشرط ضرورت، ثابت قوس کو نقطہ و پر قطع کرتی ہے۔ فرض کرو کہ ان قوسوں کا درمیانی زاویہ ع سے تعبیر ہوتا ہے۔ ہم یہ مان لیں گے کہ ن$_1$، و اور ن$_2$ کے درمیان ہے اور ن، ن$_1$ اور ن$_2$ کے درمیان ہے تب دفعہ ۳۰ کی رو سے

جب لا$_1$ = جب ع جب و ن$_1$ = جب ع جب (و ن - ط$_1$)

= جب ع (جب و ن جم ط$_1$ - جم و ن جب ط$_1$)

جب لا$_2$ = جب ع جب و ن$_2$ = جب ع جب (و ن + ط$_2$)

= جب ع (جب و ن جم ط$_2$ + جم و ن جب ط$_2$)

(۱۱۴) پہلی مساوات کو جب ط$_2$ سے اور دوسری کو جب ط$_1$ سے ضرب دیکر جمع کرو تو

جب ط$_2$ جب لا$_1$ + جب ط$_1$ جب لا$_2$ = جب (ط$_1$ + ط$_2$) جب ع جب و ن

= جب (ط$_1$ + ط$_2$) جب لا ....(۱۱ ب)

اب طالب علم کو اپنے طور پر امتحان کر کے اس کا اطمینان کر لینا چاہئے کہ ن، ن$_1$ اور ن$_2$ کے تمام اضافی مقامات کے لئے نتیجہ مندرجہ بالا صادق آتا ہے جبکہ جبری علامتوں کا مناسب لحاظ رکھا جائے۔ اس نتیجہ کے استعمال کی مثالیں ہارٹ کے دائرہ کے باب میں ملینگی۔ دفعہ ہذا کے مسئلہ کے جواب میں ہندسہ مستوی میں جو مسئلہ ہے وہ ذیل میں درج ہے۔

اگر تین نقطے ن، ن$_1$، ن$_2$ ایک ہی خط میں ہوں اور اگر ان نقطوں سے

کسی دوسرے خط پر جو عمود کھینچے جائیں ان کے طول لا، لا۱، لا۲ ہوں تو

لا = (ن ن۲ / ن۱ ن۲) لا۱ + (ن۱ ن / ن۱ ن۲) لا۲

۱۴۷- ایک مثلث کے دو ضلعوں کے نقاطِ وسطی کو ملانیوالی قوس محدودہ قاعدہ کو ایسے نقطوں پر قطع کرتی ہے جو قاعدے کے نقطہ وسطی سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ ضلعوں کے نقاط وسطی ل، م، ن ہیں اور قوس ل م، قاعدے کو نقطوں لا، ما پر قطع کرتی ہے جو حقیقت میں تقاطع نقطے ہیں۔

فرض کرو کہ نقاط راس ا، ب، ج سے قوس م ل پر عمود اپ، ب ق، اور ج ر کھینچے گئے ہیں۔ یہ قوسیں ایک نقطہ و پر ملیں گی جو دائرہ ل م کا قطب ہے۔

اب مثلثات اپ م، ج ر م میں

∠ ا م پ = ∠ ج م ر، متقابلہ زاوئے ہیں،

∠ اپ م = ∠ ج ر م، دونوں قائمہ ہیں،

ا م = م ج، بموجب فرض

اس لئے دونوں مثلث ہر طرح مساوی ہیں۔

اسی طرح مثلثات ب ق ل، ج ر ل مساوی ہیں۔ اسلئے

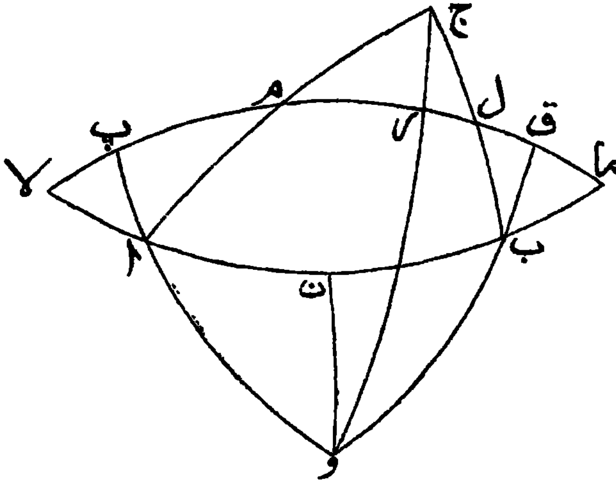
اپ = ج ر = ب ق

(۱۱۵) اب مثلثات اپ لا، ب ق ما میں

اپ = ب ق، ∠ لا = ∠ ما، ∠ اپ لا = ∠ ب ق ما

اس لئے یہ دونوں مثلث متشاکلاً مساوی ہیں۔

اس لئے ا لا = ب ما اور چونکہ ا ن = ب ن اسلئے بالآخر
لا ن = ما ن = $\frac{1}{2}$ ∠ لا ن ما = ایک ربع



نتیجہ صریح ۔ اگر مثلث کا قاعدہ دیا جائے اور راس متغیر ہو تو ضلعوں کے نقاط وسطی کو ملانے والی قوس ہمیشہ دو ثابت نقطوں میں سے گذریگی ۔

۱۴۸ ۔ دو ضلعوں کے نقاط وسطی کو ملانے والے بڑے دائرہ کا قطب، ہم پہلی مثلث کے بیرونی دائرہ کا بھی قطب ہے۔[1]

پچھلی شکل کو استعمال کرنے اور مساوی قوسوں ا پ، ب ق، ج ر کے طول کو ع سے تعبیر کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

و ج = و ر + ر ج = $\frac{1}{2}$ π + ع

---

[1] Baltzer کی Trigonometrie، دفعہ ۵ ۔

وب = وا = وپ - اپ = ½ π۲ - ع

(۱۱٦) پس وَا = وب = π - وج = وجَ

جہاں ج اور جَ متقاطر نقطے ہیں۔

پس وَ، ہم پہائی مثلث کے راسوں سے متساوی الفصل ہے اور اس لئے اس کے بیرونی دائرہ کا قطب ہے۔

اب اس دائرہ کے نصف قطر رم کی قیمت معلوم کرنا آسان ہے۔

کیونکہ رم = ½ π۲ - ع اور مثلث ج م ل میں

جب ع جب م ل = جب ج م جب ج ل جب ج

(۱٦)........

نیز م ل = ½ پ ق = ½ ∠ اوب = ∠ اون

اس لئے جب اون جم رم = جب ½ ا جب ½ ب جب ج

اور قائم الزاویہ مثلث ا ن و میں

جب ∠ اون جب رم = جب ½ ج

پس س رم = جب ½ ج ⁄ (جب ½ ا جب ½ ب جب ج) = ۲⁄ن جم ½ ا جم ½ ب جب ½ ج

(۱۷)...........

اس ضابطہ میں ہم پہائی مثلث کے عناصر مندرج کرنے سے ہم اصلی مثلث کے بیرونی دائرہ کا نصف قطر معلوم کر سکتے ہیں یعنے

س ر = ۲⁄ن جب ½ ا جب ½ ب جب ½ ج ..... (۱۸)

یہ نتیجے باب ششم کے نتیجوں کے مماثل ہیں۔

۱۴۹ـ کروی اضافہ کی ہندسی تعبیر۔ یہاں بھی اسی شکل کو استعمال کرنے سے اور دفعہ ۱۴۸ میں مثلثوں کے جو جوڑے مساوی ثابت کئے گئے ہیں انکو یاد رکھنے سے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ

$$\begin{rcases} \angle\, لا\, ا\, پ = \angle\, م\, ا\, ب\, ق \\ \angle\, م\, ا\, پ = \angle\, م\, ج\, \prime\prime \\ \angle\, ل\, ب\, ق = \angle\, ل\, ج\, \prime\prime \end{rcases} \quad\ldots\ldots\ (۱۹)$$

اس لئے

$$۲ \angle\, لا\, ا\, پ = \angle\, لا\, ا\, ج - \angle\, م\, ا\, پ + \angle\, م\, ا\, ب\, ج - \angle\, ل\, ب\, ق$$

$$= \pi - \hat{ا} + \pi - \hat{ب} - \hat{ج}$$

$$= \pi - ع، \quad \text{جہاں } ع \text{ کروی اضافہ ہے} \ldots\ldots (۲۰)$$

اس طرح زاویہ لا ا پ یا زاویہ م ا ب ق، کروی اضافہ کے نصف کا متمم ہے۔ (۱۱۷)

اب قائم الزاویہ مثلث ا پ لا میں

$$جم\, لا\, ا\, پ = س\, ا\, پ\, مم\, ا\, لا$$

اس لئے $$جب \tfrac{1}{۲} ع = س \tfrac{1}{۲} ج\, مم\, ر_۳ \ldots\ldots (۲۱)$$

ضابطہ (۱۷) سے مم $ر_۳$ کی قیمت مندرج کرو تو یہ نتیجہ ملتا ہے

$$جب \tfrac{1}{۲} ع = \frac{ن}{۲ جم \tfrac{1}{۲} ا\, جم \tfrac{1}{۲} ب\, جم \tfrac{1}{۲} ج} \ldots\ldots (۲۲)$$

جو کاگنولی کا ضابطہ ہے۔

اس سے اور (۱۸) سے

$$جب \tfrac{1}{۲} ع\, مم\, ر = \frac{۲ ن^۲}{جب\, ا\, جب\, ب\, جب\, ج} = ن \ldots\ldots (۲۳)$$

۱۵۰ — پھر مثلثات و ا ن اور ج م ل میں

$$جم\, ا\, ن\, جب\, و\, ا\, ن = جم\, ا\, و\, ن = جم\, م\, ل$$

اور $$جم\, م\, ل = جم\, ج\, ل\, جم\, ج\, م + جب\, ج\, ل\, جب\, ج\, م\, جم\, ج$$

اسلئے $$جم \tfrac{1}{۲} ع = جب\, و\, ا\, ن$$

$$= \frac{\text{جم} \tfrac{1}{2}\text{ا جم} \tfrac{1}{2}\text{ب} + \text{جب} \tfrac{1}{2}\text{ا جب} \tfrac{1}{2}\text{ب جم ج}}{\text{جم} \tfrac{1}{2}\text{ج}} \quad \ldots (۲۴)$$

جو دفعہ ۱۳۸ کے ضابطہ (۲۶) کے مماثل ہے۔

۱۵۱۔ اگر مثلث کا ایک زاویہ دیا جائے اور یہ زاویہ جن ضلعوں کے درمیان ہے اُنکے نصفوں کے مماسونکا حاصل ضرب مستقل ہو تو مثلث کا رقبہ مستقل ہوتا ہے۔

اگر مثلث کا ایک ضلع دیا جائے اور اِس سے متصلہ زاویونکے نصفوں کے مماسوں کا حاصل ضرب مستقل ہو تو مثلث کا گھیر مستقل ہوتا ہے۔

ان میں سے پہلا مسئلہ دفعہ ۱۴۰ کے ضابطہ (۳۶) میں مم $\tfrac{1}{2}$ ع کے لئے جو جملہ درج ہے اِس سے فوراً اخذ ہوتا ہے۔ دوسرا مسئلہ پہلے مسئلہ کو قطبی مثلث پر استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

۱۵۲۔ اگر مثلث کا قاعدہ دیا جائے اور اگر قاعدہ پر کے زاویونکے مجموعہ اور زاویہ راس کے درمیان فرق معلوم ہو تو بیرونی دائرہ معلوم ہو جاتا ہے۔

(۱۱۸) فرض کرو کہ بیرونی دائرہ کا قطب و ہے۔ و ا، و ب، و ج کو ملاؤ اب چونکہ متساوی الساقین مثلث کے قاعدے پر کے زاوئے مساوی ہوتے ہیں اس لئے

$$\angle \text{و ج ا} = \angle \text{و ا ج}$$

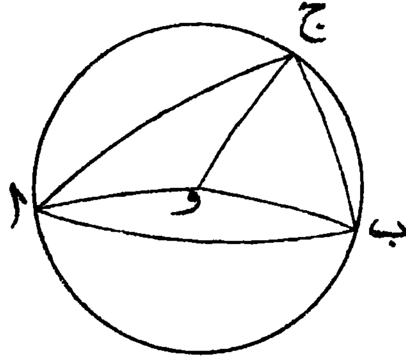
∠ و ج ب = ∠ و ب ج

∠ و ا ب = ∠ و ب ا

اسلئے ا + ب - ج = ∠ و ا ب + ∠ و ب ا

= ۲ ∠ و ا ب = ۲ ∠ و ب ا ...(۲۵)

اس لئے اگر ا + ب - ج دیا جائے تو ∠ و ا ب اور ∠ و ب ا معلوم ہوتے ہیں اور اس لئے نقطہ و ملجاتا ہے اور بیرونی دائرہ پوری طرح معلوم ہو جاتا ہے۔



اس نتیجہ کو یوں بیان کر سکتے ہیں۔ اگر ا اور ب ثابت ہوں اور ا + ب - ج مستقل تو ج کا طریق ایک چھوٹا دائرہ ہے جو ا اور ب میں سے گذرتا ہے۔

۱۵۳ لیکسل (Lexell) کا طریق[1]۔ اگر کروی مثلث کا قاعدہ اور رقبہ دئے جائیں تو اس کا طریق ایک چھوٹا دائرہ ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ ا ب دیا ہوا قاعدہ ہے اور اَ بَ علی الترتیب ا اور ب کے متقاطر نقطے ہیں۔ تب مثلث اَ بَ ج کے زاویے

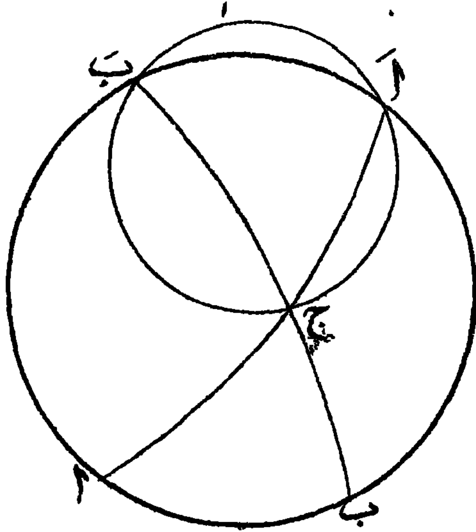
[1] Lexell, Acta Petropolitana ۱۷۸۱ء جلد اول صفحہ ۱۱۲

اَ اور بَ علی الترتیب π - ا اور π - ب کے مساوی ہیں پس

اَ + بَ - ج = ۲π - ا - ب - ج

= π - ع = مستقل

(۱۱۹) اس لئے پچھلے مسئلہ کی رو سے ج کا طریق ایک چھوٹا دائرہ ہے جو اَ اور بَ میں سے گزرتا ہے[1]



۱۵۴ - کیوگ (Keogh) کا مسئلہ[2] - کروی اضافہ کے

[1] لیکسل کے طریق کے استعمال سے (ن - ۱) ضلعوں والا کروی کثیر الاضلاع بنالینا ممکن ہے جو رقبہ میں (یا گھیرے میں) دیئے ہوئے ن ضلعوں والے کروی کثیر الاضلاع کے مساوی ہو۔
دیکھو Steiner کے Crelle's Journal II کا صفحہ ۴۵
اور Gudermann کی Neidere Spharik کا دفعہ ۱۰۴۔

[2] Nouvelles Annales de Mathematiques سلسلہ اول جلد شانزدہم ۱۸۵۷ء صفحہ ۱۴۲

نصف کی جیب اُس مثلث کے ضلعوں کے عمید کے دوچند ہوتی ہے جسکے راس اصلی مثلث کے ضلعوں کے نقاط وسطی ہوں۔

دفعہ ۱۴۷ کی شکل کے حوالے سے مثلث ا لا پ میں

جم د لا ا پ = جب لا جم لا پ

یعنی جب ½ ع = جب لا جا م ل ......(۲۶)

لیکن زاویہ لا اُس قوس ںَ کے مساوی ہے جو دو بڑے نصف دائروں لا م ما لا ن ما کے نقاط وسطی کو ملاتی ہے یعنے اُس قوس کے جو ن سے ل م پر عمود کھینچی گئی ہے۔ اس عمود کی جیب اور م ل کی جیب کا حاصل ضرب ۲ نَ ہے جہاں مثلث ل م ن کے ضلعوں کا عمید نَ ہے۔ (۱۲۰)

اس لئے جب ½ ع = ۲ نَ ....(۲۷)

۱۵۵۔ بڑے سے بڑے رقبہ والا مثلث معلوم کرنا جس کے دو ضلع دئے گئے ہوں[1]۔

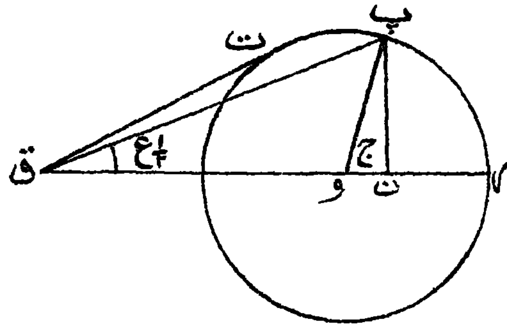
فرض کروکہ ا ب دئے ہوئے ضلع ہیں تو دفعہ ۱۳۸ کے ضابطہ (۲۹) سے

هم ½ ع = (هم ½ ا هم ½ ب + جم ج) / جب ج ....(۲۸)

اس لئے جیسے رقبہ بڑھتا ہے ع بڑھتا ہے اور هم ½ ع گھٹتا ہے۔ اسلئے ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ ج کی کونسی قیمت (اگر کوئی ہو) اس مساوات کی بائیں طرف کے جملہ کو اقل بناتی ہے۔ اس کو ہندسی عمل کے ذریعہ اس طرح معلوم کیا جاتا ہے:۔

---

[1] لیجنڈر کی Geometrie باب ہفتم مسئلہ ۲۶۔



کسی مستوی میں ایک دائرہ کھینچو جس کا مرکز و اور نصف قطر ایک ہو
اسی مستوی میں نقطہ ق لو ایسا کہ و سے اس کا خطی فاصلہ وق معلومہ
مقدار مم ½ ا مم ½ ب کے مساوی ہو۔ ق و کو ر تک خارج
کرو اور زاویہ ر و پ کروی مثلث کے زاویہ ج کے مساوی بناؤ
جہاں پ دائرہ کے محیط پر واقع ہے۔ پ سے ق ر پر عمود
پ ن کھینچو۔

تب (۱۲۱)

ن پ = جب ج ، ق ن = ق و + و ن = مم ½ ا مم ½ ب + جم ج

اور اس لئے مندرجۂ بالا مساوات (۲۸) سے

ز و ق پ = ½ ع .... (۲۹)

اگر ق دائرہ کے باہر واقع ہو جیسا کہ شکل میں ہے یعنے اگر
مم ½ ا مم ½ ب > ۱ یا ا + ب < π تو زاویہ و ق پ کی بڑی سے
بڑی ممکن قیمت اسوقت واقع ہوتی ہے جبکہ ق پ دائرہ کا مماس
ہو۔ اس صورت میں اگر اس کا محل ق ت ہو تو

ز ر و ت = ½ π + ز و ق ت

یعنے　　ج = ½ π + ½ ع

یا　　ا + ب = ج .... (۳۰)

اس لئے بڑے سے بڑے رقبہ والا مثلث وہ ہے جس میں

دئے ہوئے ضلعوں کا درمیانی زاویہ باقی دو زاویوں کے مجموعہ کے مساوی ہو ۔

اگر ا + ب = π تو مم ½ ا مم ½ ب = ۱ اور ق اکائی دائرہ کے محیط پر واقع ہوگا ۔ اور چونکہ مرکز پر کا زاویہ ر و پ محیط پر کے زاویہ ر ق پ کا دگنا ہے اس لئے

ج = ع

یا ا + ب = π .... (۳۱)

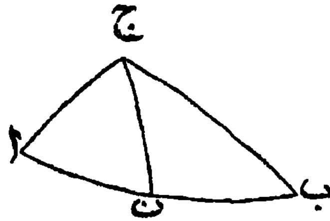
اس لئے ع کی بڑی سے بڑی قیمت وہی ہے جو ج کی بڑی سے بڑی قیمت ہے یعنی π ۔ اور مثلث کی انتہائی شکل جیسے اس کا رقبہ بڑھتا ہے ایک پھانک ہے جس کا زاویہ قائمہ ہے ۔

اگر ا + ب > π تو مم ½ ا مم ½ ب < ۱ اور ق اکائی دائرہ کے اندر واقع ہوگا ۔ اس صورت میں زاویہ و ق پ کی قیمت صفر سے π تک کچھ بھی ہو سکتی ہے اور اس لئے ع کی قیمت ۲π تک کچھ ہی ہو سکتی ہے ۔ اس صورت میں کوئی حقیقی قیمت اعظم نہیں ہوتی ۔ مثلث کو رقبہ میں ہم اتنا بڑھا سکتے ہیں کہ وہ نصف کرہ کی شکل اختیار کرلے ۔

پس اگر ا + ب ≥ π تو کوئی حقیقی قیمت اعظم نہیں حاصل ہوتی لیکن ہر صورت میں رقبہ کی ایک اوپر کی انتہا ضرور ہے ۔ رقبہ کبھی بھی انتہائی قیمت کو نہیں پہنچتا کیونکہ اگر ایسا ہو تو مثلث کا حقیقی معنوں میں مثلث برقرار رہنا ناممکن ہے ۔

۱۵۶ ۔ اگر کروی مثلث میں زاویہ ج باقی دو زاویوں کے (۱۲۲)
مجموعہ کے مساوی ہو تو بیرونی دائرہ کا قطب 'اب' میں واقع ہوگا ۔

قوس ج ن کھینچو ایسی کہ زاویہ ا ج ن، زاویہ ا کے مساوی ہو اور فرض کرو کہ قوس ج ن، ا ب سے ن پر ملتی ہے۔
اب چونکہ ج = ا + ب اور زاویہ ن ج ا = ا اسلئے باقی زاویہ ن ج ب = ب



پس مثلثات ا ن ج، ب ن ج متساوی الساقین مثلث ہیں اور اس لئے

ن ا = ن ج = ن ب

اس لئے ن، ا ب کا نقطہ وسطی ہے اور بیرونی دائرہ کا قطب ہے۔

۱۵۷ - کثیر الاضلاعوں سے متعلق مسائل - آخری دو دفعات سے حسب ذیل مسائل ماخوذ ہو سکتے ہیں:-

جب کروی کثیر الاضلاع کے سب ضلع (طول میں) سوائے ایک کے دئے جائیں تو اسکا رقبہ بڑے سے بڑا ہوگا جب اسکے راس اُس چھوٹے دائرہ پر واقع ہوں جس کا قطب مابقی ضلع کا نقطہ وسطی ہے۔

جب کروی کثیر الاضلاع کے سب ضلع (طول میں) دئے جائیں تو اس کا رقبہ بڑے سے بڑا ہوگا جب وہ ایک

چھوٹے دائرہ کے اندر کھینچا جا سکے ۔

ان دونوں مسئلوں میں ضلعوں کا اسقدر چھوٹا ہونا ضروری ہے کہ دفعہ ۱۵۵ کے مسئلہ کے پہلے جزو کا استعمال جائز ہو سکے ۔
ان مسائل کو بالکل اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے جس طرح ان کے متناظر مستوی کثیر الاضلاع کے مسئلوں کو ثابت کیا جاتا ہے ۔ دیکھو لیجنڈر کی کتاب علم ہندسہ باب ہفتم مسئلہ ۲۷ یا ٹاون سینڈ کی Modern Geometry جلد اول صفحہ ۶۳ ۔

۱۵۸ ۔ کروی مثلث کے زاویوں کو داخلاً تنصیف کرنیوالی قوسیں ایک نقطہ میں سے گذرتی ہیں[1] ۔
یہ نقطہ اندرونی دائرہ کا قطب ہے ۔ ثبوت دفعہ ۱۱۹ میں دیا جا چکا ہے
ایک زاویہ کا داخلی ناصف اور باقی دو زاویوں کے بیرونی ناصف بھی ایک نقطہ میں سے گذرتے ہیں ۔

مثلث کے ضلعوں کے نقاط وسطی سے جو قوسیں ان ضلعوں پر عمود کھینچی جائیں وہ ایک نقطہ میں سے گذرتی ہیں ۔
یہ نقطہ بیرونی دائرہ کا قطب ہے ۔ دفعہ ۱۲۲ میں اسکا ثبوت دیا جا چکا ہے ۔

۱۵۹ ۔ اگر تین قوسیں ایک نقطہ میں سے گذریں اور اگر انمیں سے کسی قوس پر کے ایک متغیر نقطے سے باقی دو قوسوں پر دو قوسیں عمود کھینچی جائیں تو ان دو قوسوں کی جیوب کی

---

[1] میلاسس نے اس کو سب سے اول ثابت کیا تھا ۔

نسبت مستقل ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ تین قوسیں و ا، و ب، و ج ہیں۔ و ب میں کوئی نقطہ ن لو اور ن م اور ن ل، بالترتیب و ا اور و ج پر عمود کھینچو۔

قائم الزاویہ مثلثات ن م و، ن ل و میں

جب ن م = جب و ن جب ا و ب، جب ن ل

= جب و ن جب ج و ب

اسلئے

$$\frac{\text{جب ن م}}{\text{جب ن ل}} = \frac{\text{جب ا و ب}}{\text{جب ج و ب}}$$

پس، جب ن م اور جب ن ل میں جو نسبت ہے وہ قوس و ب پر ن کے محل پر منحصر نہیں ہے۔ برعکس ازیں فرض کرو کہ کسی دوسرے نقطہ ن سے قوسیں ن م اور ن ل بالترتیب و ا اور و ج پر عمود کھینچی گئی ہیں۔ اب اگر

$$\frac{\text{جب ن م}}{\text{جب ن ل}} = \frac{\text{جب ن م}}{\text{جب ن ل}}$$

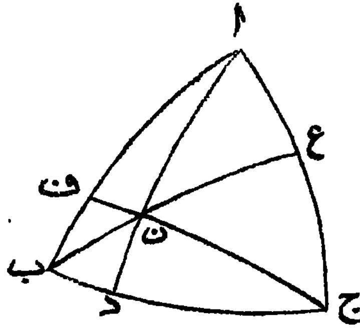
تو یہ نتیجہ نکلیگا کہ ن اسی بڑے دائرہ پر واقع ہے جس پر و اور ن ہیں۔

۱۶۰ ا۔ اگر کروی مثلث کے زاویوں سے تین قوسیں کسی نقطہ میں سے گذرتی ہوئی کھینچی جائیں اور یہ قوسیں مقابل کے ضلعوں سے ملیں تو ضلعوں کے متبادل (Alternate) مقطوعوں کی جیبوں کے حاصل ضرب مساوی ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ ن کوئی نقطہ ہے اور اس میں سے گذرنے والی قوسیں زاویوں ا، ب، ج سے کھینچی گئی ہیں جو مقابل کے ضلعوں کو نقاط د، ع، ف پر ملتی ہیں تو

$$\frac{\text{جب ب د}}{\text{جب ب ن}} = \frac{\text{جب ب ن د}}{\text{جب ب د ن}} ، \frac{\text{جب د ج}}{\text{جب ج ن}} = \frac{\text{جب ج ن د}}{\text{جب ج د ن}}$$ (۱۲۴)

اسلئے
$$\frac{\text{جب ب د}}{\text{جب د ج}} = \frac{\text{جب ب ن د}}{\text{جب ج ن د}} \times \frac{\text{جب ب ن}}{\text{جب ج ن}}$$



اسی طرح $\frac{\text{جب ج ع}}{\text{جب ع ا}}$ اور $\frac{\text{جب ا ف}}{\text{جب ف ب}}$ کے لئے جملے معلوم ہو سکتے ہیں۔ نیز

$$\angle \text{ب ن د} = \angle \text{ا ن ع} ، \angle \text{د ن ج} = \angle \text{ا ن ف}$$
$$\angle \text{ج ن ع} = \angle \text{ب ن ف}$$

اور اس لئے صریحاً یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\frac{\text{جب ب د}}{\text{جب د ج}} \times \frac{\text{جب ج ع}}{\text{جب ع ا}} \times \frac{\text{جب ا ف}}{\text{جب ف ب}} = 1 \text{......} \quad (۳۲)$$

اسلئے جب ب د جب ج ع جب ا ف

$$= \text{جب د ج جب ع ا جب ف ب} \text{...} \quad (۳۳)$$

یہ مسئلہ مستوی مثلث میں سیوا کے مسئلہ کے جواب میں ہے۔

برعکس ازیں اگر کروی مثلث کے ضلعوں میں نقاط د، ع، ف

ہوں ایسے کہ ضابطہ (۳۳) میں جو ربط دیا گیا ہے وہ درست رہے تو وہ قوسیں جو ان نقطوں کو مثلث کے راسوں سے ملاتی ہیں ایک مشترک نقطہ میں سے گذرتی ہیں۔

پس حسب تفصیل ذیل مسئلے قائم ہو سکتے ہیں:-

(۱۲۵) { کروی مثلث کے راسوں سے مقابل کے ضلعوں پر کے عمود ایک مشترک نقطہ میں سے گذرتے ہیں[1]۔

کروی مثلث کے زاویوں کو تنصیف کرنیوالی قوسیں ایک نقطہ میں سے گذرتی ہیں۔

کروی مثلث کے راسوں کو ضلعوں کے نقاط وسطی سے ملانیوالی قوسیں ایک نقطہ میں سے گذرتی ہیں۔

کروی مثلث کا اندرونی دائرہ ضلعوں کو جن نقاط پر مس کرتا ہے ان کو مثلث کے راسوں سے ملانے والی قوسیں ایک نقطہ میں سے گذرتی ہیں۔

۱۶۱ - کروی اوسط مرکز - دفعہ گذشتہ کے مسئلہ کے سلسلے میں یہ دیکھ لینا باعث دلچسپی ہے کہ اگر مثلثات ب ن ج، ج ن ا، ا ن ب کی جیوب[2] بالترتیب ۲ ن$_۱$، ۲ ن$_۲$، ۲ ن$_۳$ ہوں تو

جب ب د : جب د ج = ن$_۲$: ن$_۳$ .... (۳۴)

کیونکہ اگر ب اور ج سے ا د پر کھینچے ہوئے عمود بہ اور جہ ہوں تو

۲ ن$_۳$ = جب بہ جب ا ن، ۲ ن$_۲$ = جب جہ جب ا ن .... (۳۵)

---

[1] دیکھو Gudermann کی Niedere Spharik کا دفعہ ۶۸ اور Schulz کی Spharik کا باب دوم دفعہ ۷۴۔

[2] دیکھو دفعہ ۵۱۔

لیکن جب ب‍ہ = جب ب د جب ب د اور جب ج‍ہ = جب د ج جب د

پس جب ب د : جب د ج = جب ب‍ہ : جب ج‍ہ = ن۳ : ن۲

اس خاصیت اور ایک مستوی پر کے تین نقطوں کے اوسط مرکزی خاصیت کے درمیان جو مشابہت پائی جاتی ہے اس کی بناء پر ڈاکٹر کیسی (Dr. Casey) نقطہ ن کو نقاط ا، ب، ج (بالترتیب ضعفوں ن۱، ن۲، ن۳ کے لئے) کا کروی اوسط مرکز کہتا ہے۔

یہ آسانی کے ساتھ دیکھا جا سکتا ہے کہ ن۱، ن۲، ن۳ مماثل ہیں ہندسہ مستوی کے رقبوں ب ن ج، ج ن ا، ا ن ب کے یا ن کے رقبئی محددوں کے۔ فی الحقیقت ن۱/ن، ن۲/ن، ن۳/ن، نقطہ ن کے حجمی محدد ہیں بلحاظ اُس چار سطحی کے جس کے راس ا، ب، ج اور کرہ کا مرکز ہیں۔ دیکھو دفعہ ۱۵ میں وہ نوٹ جو مثلث کی جیب پر دیا گیا ہے۔

۱۶۲۔ مثلث کے لحاظ سے ایک نقطہ کے عمادی محدد۔

اگر لا، ما، ی سے اُن قوسوں کے طول تعبیر ہوں جو ایک نقطہ ن سے مثلث ا ب ج کے ضلعوں پر عمود ہیں تو ہم جب لا، جب ما، جب ی کو نقطہ ن کے عمادی محدد بلحاظ اِس مثلث کے کہینگے۔ جب (۱۲۶)

اِن محددوں کی نسبتیں دی جاتی ہیں تو نقطہ کا تعین ہو جاتا ہے۔

عمادی محدد صریحاً سہ خطی محددوں کے مماثل ہیں جو ایک مستوی مثلث کے لحاظ سے لئے جاتے ہیں۔

مثال کے طور پر فرض کرو کہ قوس ا د پر جو ب ج پر عمود کھینچی گئی ہے کوئی نقطہ ن ہے دیکھو دفعہ ۱۶۰ کی شکل۔

اس صورت میں قائم الزاویہ مثلثات ا د ب، ا د ج میں دفعہ ۳۷ کی

رُو سے

جم ب = جم ا جب د ا ب، جم ج = جم ا جب د ا ج

اس لئے

$$\frac{\text{جم ج جم ا}}{\text{جم ا جم ب}} = \frac{\text{جم ج}}{\text{جم ب}} = \frac{\text{جب د ا ج}}{\text{جب د ا ب}} = \frac{\text{جب ما}}{\text{جب ی}}\text{،} \quad \text{(دفعہ ۱۵۹)}$$

اگر ن، قوس ب ع پر بھی واقع ہو جو ج ا پر عمود ہے تو

اسی طرح

$$\frac{\text{جم ا جم ب}}{\text{جم ب جم ج}} = \frac{\text{جب ی}}{\text{جب لا}}$$

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\frac{\text{جم ب جم ج}}{\text{جم ج جم ا}} = \frac{\text{جب لا}}{\text{جب ما}}$$

جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ ن اس قوس پر بھی ہے جو ج سے ا ب پر عمود کھینچی گئی ہے۔

پس یہ تین عمود ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور یہ نقطہ روابط

$$\frac{\text{جب لا}}{\text{جم ب جم ج}} = \frac{\text{جب ما}}{\text{جم ج جم ا}} = \frac{\text{جب ی}}{\text{جم ا جم ب}} \quad \text{......(۳۶)}$$

کے ذریعہ متعین ہوتا ہے۔

اسی طرح کے طریق عمل سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ کروی مثلث کے زاویوں کو مقابل کے ضلعوں کے نقاط وسطی سے ملانیوالی قوسیں ایک نقطہ پر ملتی ہیں، اور اگر اس نقطہ سے تین قوسیں ضلعوں پر عمود کھینچی جائیں جنکے طول لا، ما، ی ہوں تو

$$\frac{\text{جب لا}}{\text{جب ب جب ج}} = \frac{\text{جب ما}}{\text{جب ج جب ا}} = \frac{\text{جب ی}}{\text{جب ا جب ب}} \quad \text{......(۳۷)}$$

(۱۴۷)

۱۶۳ — یہ دیکھ لینا چاہئے کہ کسی نقطہ کے عمادی محدد مثلثات ن ب ج، ن ج ا، ن ا ب کی جیوب کے ساتھ رشتوں

جب لا جب ا = ۲ ن ا، جب ما جب ب = ۲ ن ۲، جب ی جب ج = ۲ ن ۳
...........(۳۸)

سے وابستہ ہوتے ہیں۔

نقطہ کے یہ تین محدد ایک دوسرے سے بے تعلق نہیں ہوتے بلکہ وہ ہمیشہ ہونے چاہئیں ایسے کہ ربط

ن ۲ ا + ن ۲ ۲ + ن ۲ ۳ + ۲ ن ۲ ن ۳ جم ا + ۲ ن ۳ ن ۱ جم ب + ۲ ن ۱ ن ۲ جم ج = ن ۲ ...(۳۹)

پورا ہو۔

اس کا ایک آسان ثبوت کرہ کی حجمی مساوات کو لکھ لینے سے حاصل ہو سکتا ہے (دفعہ ۱۶۱)۔

۱۶۴ - کروی قاطع کی خاصیت۔ اگر ایک بڑا دائرہ مثلث اب ج کے ضلعوں کو نقاط ل، م، اور ن پر قطع کرے تو

$$\frac{\text{جب ب ل}}{\text{جب ل ج}} \times \frac{\text{جب ج م}}{\text{جب م ا}} \times \frac{\text{جب ا ن}}{\text{جب ن ب}} = -1$$

قوس ل م ن، مثلث کے ضلعوں میں سے ایک کو یا تینوں کو خارجاً قطع کرے گی۔ شکل میں صرف وہ صورت پیش کیگئی ہے جسمیں صرف ب ج خارجاً قطع ہوتا ہے۔

ل م ن پر عمود ا لا، ب ما، ج ے کھینچو۔

ا
ما
ن
لا
ے
م
ب
ل
ج

قائم الزاویہ مثلثات ب ما ل، ج ے ل سے

جب ب ما = جب ب ل جب ما ل ب،

جب ج ے = جب ج ل جب ما ل ب

پس $\frac{\text{جب ب ل}}{\text{جب ج ل}} = \frac{\text{جب ب ما}}{\text{جب ج ے}}$ ....(۴۰)

اسی طرح مثلثات ج مر ے، ا مر لا اور مثلثات ا ن لا ب ن ما کے جوڑوں سے

$\frac{\text{جب ج مر}}{\text{جب مر ا}} = \frac{\text{جب ج ے}}{\text{جب ا لا}}، \frac{\text{جب ا ن}}{\text{جب ن ب}} = \frac{\text{جب ا لا}}{\text{جب ب ما}}$ ......(۴۱)

(۱۲۸) ان تین مساواتوں کی متناظر طرفوں کو ضرب دیکر جب ج ل کی بجائے ۔جب ل ج لکھنے سے ہمیں حاصل ہو جائے گا

$\frac{\text{جب ب ل}}{\text{جب ل ج}} \times \frac{\text{جب ج مر}}{\text{جب مر ا}} \times \frac{\text{جب ا ن}}{\text{جب ن ب}} = -1$ ...(۴۲)

یہ مسئلہ ایک مستوی مثلث کے لئے مینلاس کے مسئلہ[1] کے مماثل ہے جسمیں مستوی مثلث کے ضلعوں کو ایک قاطع قطع کرتا ہے۔

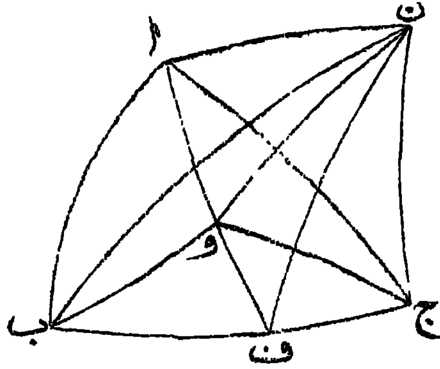
اس کا عکس بھی درست ہے یعنی اگر مثلث کے ضلعوں پر ل، مر، ن ایسے نقطے ہوں جو ربط (۴۲) کو پورا کرتے ہیں تو وہ ایک بڑے دائرہ پر واقع ہوتے ہیں ۔

۱۶۵۔ اگر ایک کروی مثلث ا ب ج کے اندر و کوئی نقطہ ہو اور کرہ پر کوئی دوسرا نقطہ ن ہو اور اگر مثلثات و ب ج، و ج ا، و ا ب کی جیوب ۲ن، ۲ن۲، ۲ن۳ ہوں تو

---

[1] دیکھو Nixon یا Russell کی loc. cit.

ن۱ جم ن ا + ن۲ جم ن ب + ن۳ جم ن ج = ن جم ن و[له]



ا و کو خارج کرو تاکہ وہ ب ج سے ف پر ملے۔

نقاط ن، ب، ف، ج پر دفعہ ۱۴۳ (۱۱) کا مسئلہ استعمال کرو تو

جب ف ج جم ن ب + جب ب ف جم ن ج

= جب ب ج جم ن ف

اسی مسئلہ کو نقاط ن، ا، و، ف پر استعمال کرنے سے (۱۲۹)

جب ف و جم ن ا + جب و ا جم ن ف

= جب ف ا جم ن و

ان دو نتیجوں سے جم ن ف کو ساقط کرنے سے

جب ف و جب ب ج جم ن ا + جب و ا جب ف ج جم ن ب

+ جب و ا جب ب ف جم ن ج

= جب ب ج جب ف ا جم ن و

اگر اسکی طرفین کو جب ف سے ضرب دیں اور یہ دیکھیں کہ

جب ب ج جب ف و جب ف = ۲ ن۱

جب و ا جب ف ج جب ف = ۲ ن۲

له یہ مسئلہ ڈاکٹر کیسی سے منسوب ہے (علم مثلث کروی صفحہ ۸۱)۔

جب و اجب ب ف جب ف = ۲ ن س

جب ب ج جب ف اجب ف = ۲ ن

تو بالآخر ہمیں حاصل ہوتا ہے

ن جم ن ا + ن جم ن ب + ن جم ن ج = ن جم ت و ... (۴۳)

۱۶۶ــ اگر ایک کروی مثلث کا قاعدہ ب ج اور نسبت جب ½ ب : جب ½ ج دی جائے تو ا کا طریق ایک چھوٹا دائرہ ہوتا ہے

اب چونکہ نسبت جب ½ ب : جب ½ ج دی گئی ہے اسلئے ا کو ب سے اور ج سے ملانے والے خط مستقیم کی نسبت دی گئی ہے اس لئے ا کا کسی خاص کرہ پر واقع ہونا ضروری ہے جس کے لحاظ سے ب اور ج مقلوب نقطے ہوں۔ ا کا طریق وہ منحنی ہے جو اس کرہ اور اصلی کرہ کے تقاطع سے پیدا ہوتا ہے یعنی ایک دائرہ۔

۱۶۷ــ اگر دو کروی مثلثوں کے زوایائے راس مساوی ہوں اور ایک کے قاعدے پر کے زاویوں کا فرق دوسرے کے قاعدے پر کے زاویوں کے فرق کے مساوی ہو تو ایک کے قاعدے پر کے زاویوں کے مقابل کے ضلعوں کے نصفوں کے مماسوں کی نسبت دوسرے مثلث کے لئے جو متناظر نسبت ہے اس کے مساوی ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ دوسرے مثلث کے عناصر زبر زدہ حروف سے تعبیر ہوتے ہیں اور ج، جَ مساوی زوایائے راس ہیں۔ نیپیر کی دوسری تمثیل سے

$$\frac{\text{جب ½ (ا - ب)}}{\text{جب ½ (ا + ب)}} = \text{مس ½ (ا - ب) مس ½ ج}$$

$$= \text{مس ½ (اَ - بَ) مس ½ جَ}$$

$$= \frac{\text{جب ½ (اَ - بَ)}}{\text{جب ½ (اَ + بَ)}}$$

پس ۱۳۰)

$$\frac{\text{جب ½ (ا + ب) - جب ½ (ا - ب)}}{\text{جب ½ (ا + ب) + جب ½ (ا - ب)}} = \frac{\text{جب ½ (اَ + بَ) - جب ½ (اَ - بَ)}}{\text{جب ½ (اَ + بَ) + جب ½ (اَ - بَ)}}$$

یا
$$\frac{\text{مس ½ ب}}{\text{مس ½ ا}} = \frac{\text{مس ½ بَ}}{\text{مس ½ اَ}} \quad \ldots\ldots\ldots (۴۴)$$

جن مثلثوں میں اس قسم کا ربط ہوتا ہے انہیں اور متشابہ مستوی مثلثوں میں ایک خاص مشابہت ہوتی ہے۔

امثلہ نمبری (۱۱)

(۱) مثلث کو حل کرو جب ضلع ا، ب اور خط وسطی م۳ دئے جائیں۔

(۲) مثلث کو حل کرو جب ضلع ا، ب اور خط وسطی م۱ دئے جائیں۔

(۳) مثلث کو حل کرو جب زاویہ ا اور وہ مقطوعے دئے جائیں جنہیں ضلع ب مقابل کے زاویہ کے ناصف سے تقسیم ہوتا ہے۔

(۴) اگر کروی مثلث اب ج کا قاعدہ اب، نقطہ و تک خارج کیا جائے اس طور پر کہ

$$\text{مس ب و} = \frac{\text{جم (ا + ب) جب ج}}{\text{۱ - جم ج جم (ا + ب)}}$$

تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب ج جم ج و = جب (ا + ب) جب ب جب ا و}$$

اس سے ثابت کرو کہ اگر کروی مثلث کا قاعدہ ثابت کردیا جائے اور راس حرکت کرے اس طور پر کہ ضلعوں کا مجموعہ مستقل رہے تو محدودہ قاعدہ پر ایک نقطہ ایسا معلوم کیا جاسکتا ہے کہ اس نقطہ سے راس کا جو فاصلہ ہے اسکی جیب التمام اُس فاصلہ کی جیب التمام سے ایک مستقل نسبت رکھے جو ایک خاص ثابت بڑے دائرے کی قوس سے راس کا ہے۔ (R. U. I. 1899)

(۵) ایک کروی مثلث کے راسوں ا ٗ ب ٗ ج سے مقابل کے ضلعوں پر جو عمود ڈالے گئے ہیں اُن کے پائین پ ٗ ق ٗ ر ہیں۔ ثابت کرو کہ ب ق ٗ زاویہ پ ق ر کا ناصف ہے۔ اور ثابت کرو کہ جب مثلث ا ب ج حادۃ الزاویہ ہو تو

$$\text{جم پ ق ر} = \frac{\text{جم}^2\text{ا} - \text{جم}^2\text{ب} + \text{جم}^2\text{ج} + 2\,\text{جم ا جم ب جم ج}}{\text{جم}^2\text{ا} + \text{جم}^2\text{ب} + \text{جم}^2\text{ج} + 2\,\text{جم ا جم ب جم ج}}$$

(R. U. I. 1898)

(۶) ایک مثلث ا ب ج ہے ایسا کہ ا ب کو قطر مانکر چھوٹا دائرہ کھینچا جائے تو وہ ج میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ $\text{جم ا جم ب} = \text{جم}^2 \frac{1}{2}\text{ج}$

(R. U. I. 1898)

(۷) اگر ایک کروی مثلث کے دو ضلع ایک دوسرے کے تکملہ ہوں تو ثابت کرو کہ اِن کے نقطہ تقاطع میں سے گذرنے والا خطِ وسطی رُبع کے مساوی ہے

(R. U. I. 1895)

(۸) اگر ایک کروی مثلث کے زاویوں ا ٗ ب ٗ ج کے داخلی ناصف ایک دوسرے کو و پر قطع کریں اور مقابل کے ضلعوں سے بالترتیب پ ٗ ق اور ر پر ملیں تو ثابت کرو کہ (۱-۲

$$\frac{\text{جب ن و}}{\text{جب ا جب پ ا}} = \frac{\text{جب ق و}}{\text{جب ب جب ق ب}} = \frac{\text{جب ر و}}{\text{جب ج جب ر ج}} = \frac{1}{\sqrt{\text{جب}^2\text{س} + \text{جب س جب (س - ا) جب (س - ب) جب (س - ج)}}}$$

(R. U. I. 1895)

(۹) ایک کروی مثلث کے زاویہ راس ا کے داخلی و بیرونی ناصف قاعدے سے بالترتیب نقاط پ اور ق پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

جم ب پ ا = ½ (جم ج - جم ب) قط ½ ا

اور

جم پ ق = جب (ب - ج) جب (ب + ج) ÷ √{(جم² ب + جم² ج - ۱)² - ۴ (جم ا + جم ب جم ج)²}

(R. U. I. 1895)

(۱۰) ا ب ج ایک کروی مثلث ہے۔ ع، ب ج کا نقطہ وسطی ہے اور ا د، ب ج پر علی القوائم کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ

مس ع د جب (ب + ج) = مس ½ ا جب (ب - ج)

ان تمام صورتوں کو جنھیں ع د ایک ربع سے متجاوز کرے سوال سے خارج کرکے یہ معلوم کرو کہ کن حالات کے تحت د اور ب، ع کے ایک ہی جانب واقع ہونگے اور کن حالات کے تحت ع کے متضاد جوانب۔

(Sci. & Art, 1894

(۱۱) ا ب ج د ایک کروی چار زاوئی ہے اور قوسوں ج ا اور د ب کے نقاط وسطی ع، ف ہیں۔ ثابت کرو کہ

جم ا ب + جم ب ج + جم ج د + جم د ا

= ۴ جم ½ ج ا جم ½ د ب جم ع ف

(Gudermann)

(۱۲) ا، ب، ج، د چار بڑے دائرے ہیں اور ع، ف وہ بڑے دائرے ہیں جو زاویوں (ج ا) اور (د ب) کی تنصیف کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

جم (ا ب) + جم (ب ج) + جم (ج د) + جم (د ا)

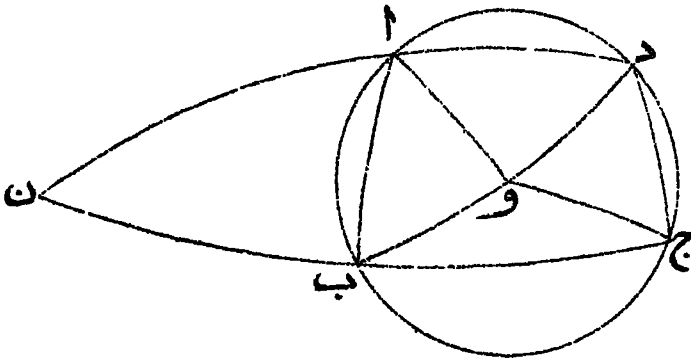
= ۴ جم ½ (ج ا) جم ½ (د ب) جم (ع ف)

(Gudermann)

نواں باب (۱۳۲)

کرہ پر کے دائروں کے خواص

۱۶۸ - اگر ایک کروی ذو اربعۃ الاضلاع کے راس ایک چھوٹے دائرہ پر واقع ہوں تو متقابلہ زاویوں کے زوجوں کے مجموعے مساوی ہوتے ہیں[ا]۔



[ا] Lexell, Acta Petrop, [illegible], 1787 [illegible]

فرض کرو کہ ا ب ج د ذوار بعۃ الاضلاع اور و چھوٹے دائرہ کا قطب ہے۔ و کو ہر راس سے ملاؤ تو اس طرح جو مثلث پیدا ہونگے وہ متساوی الساقین ہونگے۔ اس لئے

ﮮ و د ا = ﮮ و ا د، ﮮ و د ج = ﮮ و ج د

ﮮ و ب ا = ﮮ و ا ب، ﮮ و ب ج = ﮮ و ج ب

ان مساواتوں کی متناظر طرفوں کو جمع کرنے سے

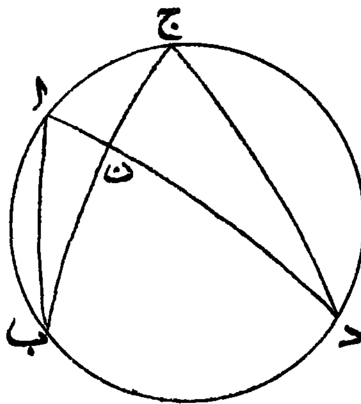
ﮮ ا د ج + ﮮ ا ب ج = ﮮ ب ا د + ﮮ ب ج د

.... (۱)

اگر ذوار بعۃ الاضلاع چلیپائی (Crossed) ہو، جیسے دوسری شکل میں، تو اسی طرح ہم حاصل کرتے ہیں (۱۳۴

ﮮ ب ا د + ﮮ ا د ج = ﮮ ا ب ج + ﮮ ب ج د

دونوں صورتیں حسب ذیل دعوے میں شامل ہو جاتی ہیں۔



اگر ا، ب، ج، د ایک چھوٹے دائرہ پر چار نقطے ہوں اور اگر قوسیں اد، ب ج نقطہ ن میں ایک دوسرے کو قطع کریں تو

ﮮ ن ج د - ﮮ ن د ج = ﮮ ن ا ب - ﮮ ن ب ا

.... (۳)

۱۶۹- ایک دائرہ کے لحاظ سے ایک نقطہ کی کروی طاقت-

دفعہ سابق سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مثلثات ن ا ب اور ن ج د ایک دوسرے سے اسی طرح وابستہ ہوتے ہیں جس طرح وہ مثلثات جن پر دفعہ ۱۶۷ میں بحث ہوئی ہے خواہ ن چھوٹے دائرہ کے اندر واقع ہو یا باہر-

اس لئے

$$\frac{\text{مس}\ \frac{1}{2}\ \text{ن ب}}{\text{مس}\ \frac{1}{2}\ \text{ن ا}} = \frac{\text{مس}\ \frac{1}{2}\ \text{ن د}}{\text{مس}\ \frac{1}{2}\ \text{ن ج}}$$

یعنی مس $\frac{1}{2}$ ن ا مس $\frac{1}{2}$ ن د = مس $\frac{1}{2}$ ن ب مس $\frac{1}{2}$ ن ج ...(۴)

اس طرح ان تمام قوسوں کے لئے جو ن سے کھینچی جائیں مثلاً

قوس ن ا د حاصل ضرب مس $\frac{1}{2}$ ن ا مس $\frac{1}{2}$ ن د مستقل ہے-

اس حاصل ضرب کی مستقل قیمت کے لئے سادہ سا جملہ معلوم کرنا ہو تو ہمیں
قوس ن ا د کا صرف وہ مخصوص محل لینا ہوگا جو ن کو دائرہ کے قطب
و سے ملانے سے پیدا ہوتا ہے - تب اگر ہم زاویٰ فاصلہ ن و کو (۱۳۴)
ضھ سے اور دائرہ کے زاویٰ نصف قطر کو ر سے تعبیر کریں تو ن د کی
مخصوص قیمت ضھ + ر ہے اور ن ا کی ضھ - ر اگر ن دائرہ
کے باہر ہو اور ر - ضھ اگر ن دائرہ کے اندر ہو-

اسلئے جب ن دائرہ کے باہر ہو تو

مس $\frac{1}{2}$ ن ا مس $\frac{1}{2}$ ن د = مس $\frac{1}{2}$ (ضھ + ر) مس $\frac{1}{2}$ (ضھ - ر) ....(۵)

اور جب ن دائرہ کے اندر ہو تو

مس $\frac{1}{2}$ ن ا مس $\frac{1}{2}$ ن د = مس $\frac{1}{2}$ (ضھ + ر) مس $\frac{1}{2}$ (ر - ضھ) ....(۶)

اگر ا اور د منطبق ہو جائیں فرض کرو نقطہ ت پر تو قوس ن ت دائرہ کو نقطہ ت پر مس کریگی اور اس مماسی قوس کا طول ہوگا

مس۲ ½ ن ت = مس ½ (ضہ + ر) مس ½ (ضہ − ر) ...(۷)

مستقل مس ½ (ضہ + ر) مس ½ (ضہ − ر) یا $\frac{\text{جم ر} - \text{جم ضہ}}{\text{جم ر} + \text{جم ضہ}}$ کو ہم

اس دائرہ کے لحاظ سے نقطہ ن کی کروی طاقت کہینگے۔ یہ مستقل مثبت ہوگا جبکہ ن دائرہ کے باہر ہو اور منفی جبکہ وہ دائرہ کے اندر ہو۔

باب ہذا کا مسئلہ اسقدر اہم ہے کہ ہم اس کا دوسرا ثبوت بھی دینگے۔

۷۰ا۔ اگر کسی بڑے دائرہ کی ایک متغیر قوس ہمیشہ ایک ثابت نقطہ ن میں سے گذرے اور ایک دئے ہوئے چھوٹے دائرہ کو نقاط ا اور ب پر قطع کرے تو حاصلضرب

مس ½ ن ا مس ½ ن ب

مستقل ہوتا ہے[1]۔

چھوٹے دائرہ کے قطب و سے قوس و م، ا ب پر عمود کھینچو۔ مثلثات و ا م، و ب م صریحاً متشاکلاً مساوی ہیں اور اس لئے م، ا ب کا نقطہ وسطی ہے۔

اب قائم الزاویہ مثلثات ن و م، ا و م سے

$$\frac{\text{جم ن م}}{\text{جم ن و}} = \frac{1}{\text{جم م و}} = \frac{\text{جم ا م}}{\text{جم ا و}}$$

[1] Lexell, Acta Petropolitana, 1782 کا صفحہ ۶۵

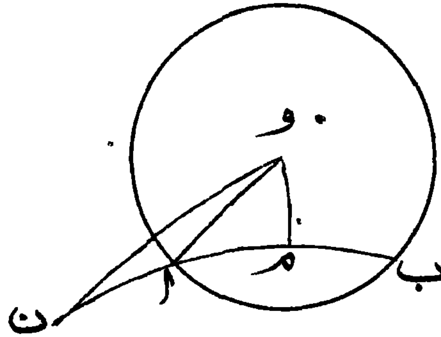
(۱۳۵) اس لئے

$$\frac{\text{جم ا م} - \text{جم ن م}}{\text{جم ا م} + \text{جم ن م}} = \frac{\text{جم ا و} - \text{جم ن و}}{\text{جم ا و} + \text{جم ن و}}$$

یا

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}(\text{ن م} - \text{ا م})\ \text{مس}\ \tfrac{1}{2}(\text{ن م} + \text{ا م})$$

$$= \text{مس}\ \tfrac{1}{2}(\text{ن و} - \text{ا و})\ \text{مس}\ \tfrac{1}{2}(\text{ن و} + \text{ا و})$$



$$= \text{مس}\ \tfrac{1}{2}\,\text{ن ا}\ \text{مس}\ \tfrac{1}{2}\,\text{ن ب} = \text{مس}\ \tfrac{1}{2}(\text{ض} - \text{ر})\ \text{مس}\ \tfrac{1}{2}(\text{ض} + \text{ر})$$

(۸) ....

جو مطلوبہ نتیجہ ہے۔

۱۷۱- اگر ایک متغیر نقطہ ن سے جو ایک ثابت بڑے دائرہ ن ل پر واقع ہے ایک دئے ہوئے چھوٹے دائرہ کے

دو کروی مماس ن ع' ن ف کھینچے جائیں تو حاصل ضرب مس $\frac{۱}{۲}$ ل ن ع مم $\frac{۱}{۲}$ ل ن ف کی قیمت مستقل ہوتی ہے[ا]۔ (۱۳۶)

چھوٹے دائرہ کے قطب و سے قوس و ل' ن ل پر عمود کھینچو۔ قوس و ن صریحاً زاویہ ع ن ف کی تنصیف کرتی ہے۔

اب قائم الزاویہ مثلثات و ع ن' و ل ن میں

$$\frac{\text{جب و ع}}{\text{جب ع ن و}} = \text{جب ن و} = \frac{\text{جب ل و}}{\text{جب ل ن و}}$$

[ا] Gudermann, Niedere Spharik دفعہ ۲۹۶۔ اس مستقل کو ہم چھوٹے دائرہ کے لحاظ سے بڑے دائرہ کی کروی طاقت کہہ سکتے ہیں۔ (دیکھو تیم کی تمہید کا حاشیہ) اگر چھوٹا دائرہ اور بڑا دائرہ ایک دوسرے کو زاویہ فہ پر قطع کریں تو کروی طاقت مس $\frac{۱}{۲}$ فہ کے مساوی ہے۔

اس لئے

(جب ل ن و - جب ع ن و) / (جب ل ن و + جب ع ن و) = (جب ل و - جب ع و) / (جب ل و + جب ع و)

یا

مس ½ (ل ن و - ع ن و) / مس ½ (ل ن و + ع ن و) = مس ½ (ل و - ع و) / مس ½ (ل و + ع و)

ل و کو ع سے تعبیر کرو جو مستقل ہے تو

مس ½ ل ن ع / مس ½ ل ن ف = مس ½ (ع - ر) / مس ½ (ع + ر) .... (۹)

اور یہی ثابت کرنا تھا۔

۱۷۲ ۔ چھوٹے دائرہ پر کے چار نقطوں کو ملانیوالی قوسوں کے درمیان ربط ۔

فرض کرو کہ نقاط ا، ب، ج اور د ہیں جنکو ترتیب وار لیا گیا ہے۔ ٹولمی کے مسئلہ سے ہم جانتے ہیں کہ وتروں کے طولوں کے درمیان حسب ذیل ربط ہے :-

اب × ج د + اد × ب ج = ا ج × ب د .... (۱۰)

(۱۳۷) اب اگر کرہ کا نصف قطر ر ہو تو

وتر اب = ۲ ر جب ½ اب .... (۱۱)

پس ربط (۱۰) شکل

جب ½ اب جب ½ ج د + جب ½ اد جب ½ ب ج

= جب ½ ا ج جب ½ ب د .... (۱۲)

میں لکھا جا سکتا ہے۔ یہی مطلوبہ ربط ہے اور خواہ دائرہ چھوٹا ہو یا بڑا ہر صورت میں صادق آتا ہے۔ یہاں یہ بات یقیناً مضمر ہے کہ خواہ دائرہ بڑا ہو یا چھوٹا، اب وغیرہ بڑے دائروں کی قوسوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

۱۷۳ ۔ بڑے دائرہ پر کے چار نقطوں کے باہمی فاصلوں کے

درمیان روابط۔

فرض کرو کہ نقاط ا، ب، ج اور د ہیں جنکو ترتیب وار لیا گیا ہے
اگر ہم رکھیں اب = طہ، ب ج = فہ، ج د = یہ
تو اج = طہ + فہ، ب د = فہ + یہ، اد = طہ + فہ + یہ
اور کوئی متماثل ربط جو طہ، فہ، یہ، طہ + فہ، فہ + یہ، طہ + فہ + یہ کے مثلثی تفاعلوں میں موجود ہو اب، ب ج وغیرہ کے متناظر تفاعلوں کے لئے بھی برابر صادق آئے گا۔

مثلاً

جب طہ جب یہ + جب فہ جب (طہ + فہ + یہ)

≡ جب (طہ + فہ) جب (طہ + یہ) ....(۱۳)

اور اس لئے بڑے دائرہ پر کے چار نقطوں کی صورت میں

جب اب جب ج د + جب ب ج جب اد

= جب اج جب ب د ......(۱۴)

اسی طرح ربط ذیل بھی درست ہے

جم اب جم ج د ـ جم اج جم ب د = جب ب ج جب اد

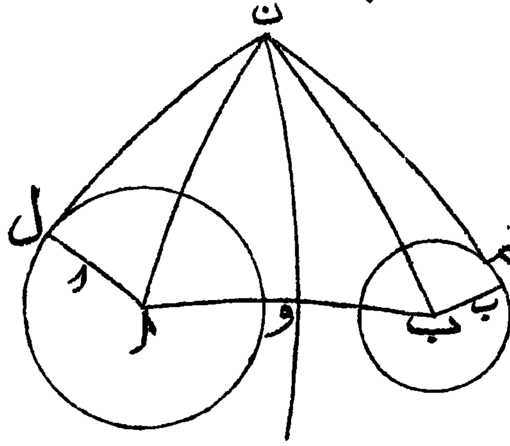
..........(۱۵)

ایسے روابط تعداد میں لاانتہا معلوم کئے جا سکتے ہیں ـ نیز قوسوں کے مثلثی تفاعلوں کے درمیان ہر وہ ربط جو موجود ہو قوسوں کے ہم ضعفوں یا باہم تحت ضعفوں کے انھی تفاعلوں کے لئے بھی درست رہتا ہے۔

۱۷۴ ـ کرہ پر کے اس نقطہ کا طریق معلوم کرنا جس سے کھینچے ہوئے دو دئے ہوئے چھوٹے دائروں کے کروی مماس مساوی ہوں ـ

فرض کرو کہ چھوٹے دائروں کے قطب ا، ب اور ان کے زاوئی نصف قطر ا، ب ہیں۔ ن ایک نقطہ ہے ایسا کہ کروی مماس ن ل، ن م جو اِس نقطہ سے ان دائروں پر کھینچے گئے ہیں مساوی ہیں۔

(۱۳۸) بڑا دائرہ ن و کھینچو جو اب پر عمود ہو اور اس سے نقطہ و پر ملے۔



اب چونکہ ل، م، اور و پر کے زاوئے قائمہ ہیں اس لئے

$$\text{جم ن ل} = \frac{\text{جم ن ا}}{\text{جم ا}} = \frac{\text{جم ا و}}{\text{جم ا}}\ \text{جم و ن}$$

اور

$$\text{جم ن م} = \frac{\text{جم ن ب}}{\text{جم ب}} = \frac{\text{جم و ب}}{\text{جم ب}}\ \text{جم و ن}$$

پس، چونکہ ن ل = ن م

$$\frac{\text{جم ا و}}{\text{جم ا}} = \frac{\text{جم و ب}}{\text{جم ب}} \quad \text{...........(۱۶)}$$

اور اس لئے

$$\frac{\text{جم ا و}}{\text{جم و ب}} = \frac{\text{جم ا}}{\text{جم ب}} = \text{ایک معلومہ مستقل} \quad \text{......(۱۷)}$$

اس طرح و ایک ثابت نقطہ ہے اور ن کا طریق ایک بڑا دائرہ ہے

جو و میں سے گذرتا ہے اور ا ب پر علی القوائم ہے۔

اس بڑے دائرہ کو ہم دئے ہوئے دو دائروں کا بنیادی دائرہ کہینگے۔
یہ ظاہر ہے کہ اگر دئے ہوئے دائرے ایک دوسرے کو قطع کریں تو انکا بنیادی دائرہ
دائرہ ان کے نقاط مشترک میں سے گذرتا ہے۔ اس صورت میں طریق کا کچھ حصہ
دونوں دائروں کے اندر ہوتا ہے اور اس حصہ پر کے نقطوں سے متناظر
(۱۳۹) مماس کوئی حقیقی وجود نہیں رکھتے۔ تاہم یہ یاد رکھکر کہ ایک نقطہ سے ایک دائرہ
کا جو کروی مماس کھینچا جائے اس کے نصف کے ٹان کا مربع، اس دائرہ
کے لحاظ سے اس نقطہ کی کروی طاقت کے مساوی ہوتا ہے ہم اپنے طریق کی تعریف
اس طرح کر سکتے ہیں کہ یہ ایسے نقطہ کا طریق ہے جس کی کروی طاقتیں
بلحاظ دو دئے ہوئے دائروں کے مساوی ہیں۔ اسکو اس شکل میں بیان
کرنے سے اس کی خاصیت قابل فہم ہو جاتی ہے خواہ نقطے دائروں کے
باہر واقع ہوں یا اندر۔

۱۷۵ — ہم محور دائرے۔ کرہ پر کے دائروں کا وہ نظام، دائروں کا ہم محور نظام کہلاتا ہے جو ایسا ہو کہ اس نظام کے دائروں کے سب زوجوں کا بنیادی دائرہ ایک ہی ہو۔

اگر کسی ہم محور نظام کے دائروں کے قطب ا، ب، ج، د، وغیرہ ہوں اور ان کے نصف قطر را، رب، رج، رد، وغیرہ تو یہ ظاہر ہے کہ

(۱) ا، ب، ج، د، وغیرہ ایک ہی بڑے دائرہ پر واقع ہونے چاہئیں۔

(۲) اس بڑے دائرہ پر ایک ایسا نقطہ و (محوری مرکز) ہونا چاہئے کہ

$$\frac{\text{جم و ا}}{\text{جم را}} = \frac{\text{جم و ب}}{\text{جم رب}} = \frac{\text{جم و ج}}{\text{جم رج}} = \frac{\text{جم و د}}{\text{جم رد}} = \text{وغیرہ} \quad \ldots\ldots (۱۸)$$

(۳) بنیادی دائرہ کے کسی نقطہ ن سے ان تمام دائروں کے مماس مساوی ہیں۔ اور وہ دائرہ جس کا قطب ن ہے اور جس کا نصف قطر مماس کا مشترک طول ہے نظام کے تمام دائروں کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

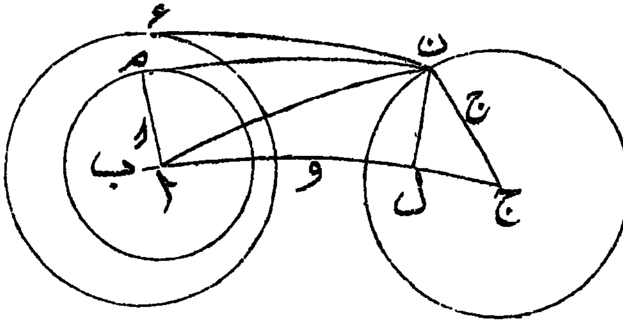
(۴) اگر ان میں سے دو دائرے ایک دوسرے کو قطع کریں تو نظام کے تمام دائرے ان دو نقطوں میں سے گذرتے ہیں۔ یہ اسوقت واقع ہوتا ہے جب ضابطہ (۱۸) کی مساوی نسبتیں ایک سے بڑی ہوں

(۵) جب ضابطہ (۱۸) کی نسبتیں ایک سے چھوٹی ہوں (فرض کرو ک کے مساوی ہیں) تو نظام میں دو نقطہ دائرے (Pt. circles) ہوتے ہیں۔ یہ د کے متضاد جوانب اور اس سے متساوی الفصل ہوتے ہیں، یہ فاصلہ جم$^{-1}$ک کے مساوی ہے۔ ان نقطوں کو ہم انتہائی نقطے کہیں گے۔

(۶) جب انمیں سے دو دائرے ایک دوسرے کو مس کریں تو محوری مرکز اور اس نظام کے انتہائی نقطے نقطہ تماس پر منطبق ہوتے ہیں اور نظام کے تمام دائرے اسی نقطہ پر ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں یہ اس وقت واقع ہوتا ہے جب ضابطہ (۱۸) کی نسبتیں ایک کے مساوی ہوں۔ یہ (۴) اور (۵) صورتوں کے درمیان صورت مرور ہے۔ (۱۴۰)

۱۷۶۔ کسی چھوٹے دائرہ کے ایک نقطے سے دوسرے چھوٹے دائرہ پر جو کروی مماس کھینچا جائے اس کا طول معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ چھوٹے دائرہ ل کے قطب ا اور ج ان کے نصف قطر ر اور ر' اور ان کا محوری مرکز و ہے۔ ن، دائرہ ج پر کوئی نقطہ ہے اور ن م، دائرہ ا کا کروی مماس ہے۔ ا ج پر عمود ن ل کھینچو۔



قائم الزاویہ مثلثوں ن م ا، ن ل ا، ن ل ج میں جیب التمامی ضابطہ استعمال کرنے سے ہم بہ آسانی حاصل کرتے ہیں

$$\text{جم ر} - \text{جم ر جم ن م} = \text{جم ر} - \text{جم ن ا}$$

$$= \text{جم ر} - \frac{\text{جم ا ل}}{\text{جم ل ج}}\ \text{جم ج}$$

$$= \text{جم ج} \left\{ \frac{\text{جم ا و}}{\text{جم و ج}} - \frac{\text{جم ا ل}}{\text{جم ل ج}} \right\}$$

$$= \text{جم ج}\ \frac{\text{جب ا ج جب و ل}}{\text{جم و ج جم ل ج}}$$

(دفعہ ۱۷۳، ضابطہ ۱۵)

$$\text{پس}\quad ۲\ \text{جب}^{۲}\ \tfrac{۱}{۲}\ \text{ن م} = \frac{\text{جب و ل جم ج}}{\text{جم و ج جم ل ج}} \times \frac{\text{جب ا ج}}{\text{جم ر}} \quad \ldots\ldots (۱۹)$$

۱۷۷۔ اگر ا، ب، ج ایک ہم محور نظام کے تین دائرے ہوں اور اگر ج پر کے متغیر نقطہ ن سے ا اور ب پر مماس (۱۴۱)
ن م، ن ع کھینچے جائیں تو $\text{جب}\ \tfrac{۱}{۲}\ \text{ن م}$ اور $\text{جب}\ \tfrac{۱}{۲}\ \text{ن ع}$ میں مستقل نسبت ہوتی ہے۔

دفعہ ماسبق سے

$$\text{۲ جب}^{۲}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{ن ع} = \frac{\text{جب و ل جم ج}}{\text{جب و ج جم ل ج}} \times \frac{\text{جب ب ج}}{\text{جم ب}} \quad \text{......(۲۰)}$$

اب (۱۹) کی طرفین کو (۲۰) کی متناظر طرفین سے تقسیم کیا جائے تو

$$\frac{\text{جب}^{۲}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{ن د}}{\text{جب}^{۲}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{ن ع}} = \frac{\text{جب ا ج}}{\text{جب ب ج}} \times \frac{\text{جم ب}}{\text{جم ا}} \quad \text{........(۲۱)}$$

اس مساوات کی بائیں طرف کا جملہ دائرہ ج پر نقطہ ن کے تمام مقامات کے لئے وہی ہے اور اس لئے دائیں طرف کا جملہ مستقل ہے۔

۱۷۸ ۔ یہ شرط معلوم کرنا کہ دیا ہوا دائرہ دئے ہوئے مثلث کے بیرونی دائرہ کو مس کرے۔

ا، ب، ج ایک دائرہ پر تین نقطے ہیں۔ ا لا، ب ما، ج ے دوسرے دائرہ کے کروی مماس ہیں۔ اب اگر تین حاصل ضربوں

جب ½ ا لا جب ½ ب ج، جب ½ ب ما جب ½ ج ا، جب ½ ج ے جب ½ ا ب

میں سے کسی دو کا مجموعہ تیسرے کے مساوی ہو تو دائرے مس کرینگے۔

(۱۴۲) فرض کرو کہ اِن دائروں سے جو محوری نظام متعین ہوتا ہے اس کے انتہائی نقطوں (نقطہ دائروں) میں سے ایک نقطہ ل ہے۔ اب دفعہ ماسبق سے

$$\frac{\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{الا}}{\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ال}} = \frac{\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ب ما}}{\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ب ل}} = \frac{\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ج ے}}{\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ج ل}} \quad \ldots\ldots(۲۱)$$

اس لئے مطلوبہ شرط یہ ہو جاتی ہے کہ تین حاصل ضربوں

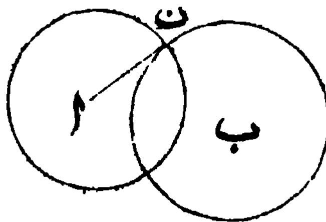
$$\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ال جب}\tfrac{1}{2}\text{ب ج}،\ \text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ب ل جب}\tfrac{1}{2}\text{ج ا}،$$

$$\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ج ل جب}\tfrac{1}{2}\text{اب}$$

میں سے دو کا مجموعہ تیسرے کے مساوی ہو۔ لیکن جب یہ صورت ہو تو ہم دفعہ ۱۷۲ سے جانتے ہیں کہ ل، دائرہ ا ب ج پر واقع ہوتا ہے یعنی انتہائی نقطہ، اِن دائروں میں سے ایک دائرہ پر واقع ہوتا ہے؛ اس لئے دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔

۱۷۹ - اگر دو چھوٹے دائرے ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کریں تو ایک دائرہ کا مستوی اُس مخروط کے راس میں سے گذرتا ہے جو کرہ کو دوسرے دائرہ کے محیط پر مس کرتا ہے۔

فرض کرو کہ دائروں کے قطب ا، ب ہیں اور نقاط تقاطع میں سے ایک نقطہ ن ہے۔



اب چونکہ قوس ا ن اور دائرہ ب ایک دوسرے کو ن پر مس کرتے ہیں اس لئے اس نقطہ پر دونوں کا ماسی خط ایک ہی ہے اور یہ خط دائرہ ب کے مستوی میں واقع ہے اور اس مخروط کے راس میں سے گذرتا ہے جو کرہ کو دائرہ ا کے محیط پر مس کرتا ہے۔ اس لئے ب کا مستوی اس مخروط کے راس میں سے گذرتا ہے۔

اس ثابت کردہ مسئلہ سے ہم حسب ذیل نتیجے اخذ کرتے ہیں۔

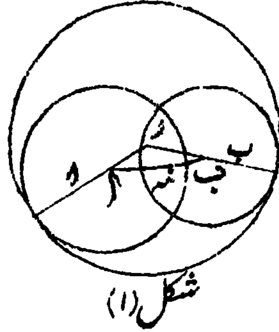
(۱) اگر کرہ پر کے متعدد دائرے ایک مشترک دائرہ کو علی القوائم قطع کریں تو ان دائروں کے مستوی ایک مشترک نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔

(۲) اگر کرہ پر کے متعدد دائرے دو مشترک دائروں کو علی القوائم قطع کریں تو ان دائروں کے مستوی دو مشترک نقطوں میں سے گذرتے ہیں۔ اس طرح یہ مستوی مشترک نقطوں کی لا انتہا تعداد میں سے گذرتے ہیں اور اس لئے وہ دائرے جو دو مشترک دائروں کو علی القوائم قطع کرتے ہیں لا انتہا مشترک دائروں کو علی القوائم قطع کرتے ہیں۔

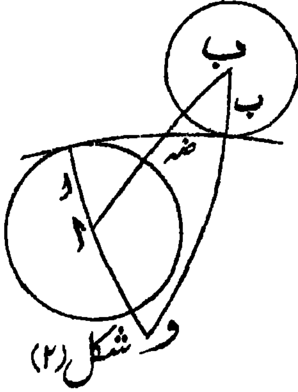
اب چونکہ ہم محور نظام کے دائرے لا انتہا مشترک دائروں کو علی القوائم قطع کرتے ہیں جن کے قطب بنیادی دائرہ پر واقع ہیں اس لئے ہم محور نظام کے دائروں کے مستوی ایک مشترک خط میں سے گذرتے ہیں جو بنیادی دائرہ کے مستوی میں واقع ہوتا ہے۔

ہم محور نظام کی اس خاصیت کو ڈاکٹر کیسی (Dr. Casey) اس نظام کی تعریف قرار دیتا ہے اور باقی تمام خواص اس سے اخذ کرتا ہے۔ دیکھو اس کا علم مثلث کروی باب ششم۔

۱۸۰۔ دو دئے ہوئے چھوٹے دائروں کو مس کرنیوالے بڑے دائروں کی تعداد معلوم کرنا۔



شکل (۱)



شکل (۲)

فرض کرو کہ دو چھوٹے دائروں کے قطب ا، ب اور نصف قطر
ا، ب ہیں۔ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ ایک ہی بڑا دائرہ اِن دونوں کو
مس کرتا ہے جس کا قطب و ہے۔ ہم فاصلہ اب کو ضہ سے
(۱۴۴) تعبیر کرینگے اور جب نصف قطر ا، ب غیر مساوی ہوں تو ا کو ب سے
بڑا فرض کرینگے۔

اگر چھوٹے دائرے بڑے دائرہ کی ایک ہی جانب واقع
ہوں جیسا کہ شکل (۱) میں بتایا گیا ہے تو بڑے دائرہ کو ہم ہندسہ
مستوی کی متناظر صورت سے مشابہت ہونے کی وجہ سے چھوٹے دائروں کا مشترک
بیرونی کرُوی مماس کہہ سکتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ جب اس طرح کا ایک
مماس موجود ہو تو دوسرا بھی ہے اور یہ دونوں، قوس اب کے لحاظ سے
متشاکلاً واقع ہیں۔

اب شکل (۱) کے حوالے سے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ مثلث اوب
میں او $= \frac{1}{2}\pi -$ ا، ب و $= \frac{1}{2}\pi -$ ب، اور اب وہی ہے
جس کو ہم نے ضہ سے موسوم کیا ہے۔ لیکن مثلث کے دو ضلع تیسرے
سے بڑے ہوتے ہیں اور اس لئے مثلث اوب صرف اس وقت
ممکن ہے جبکہ

او + وب > اب' اور او + اب > وب

یعنے جب π > ا + ب + ضہ اور ضہ > ا - ب -

اس طرح اگر ضہ ' ا - ب اور π - (ا + ب) کے درمیان واقع ہو تو دو بیرونی مشترک مماس موجود ہونگے ورنہ نہیں - اس نتیجہ کو اسطرح بیان کر سکتے ہیں کہ دو دئے ہوئے دائروں کے بیرونی مشترک مماس موجود نہیں ہونگے (۱) اگر ایک دائرہ بالکلیہ دوسرے کے اندر واقع ہو' (۲) اگر وہ دائرے جن کے قطب تو وہی ہوں جو اصلی دائروں کے ہیں لیکن جن کے نصف قطر بالترتیب اصلی دائروں کے نصف قطروں کے متمم ہوں ایک دوسرے کے بالکلیہ باہر واقع ہوں - موخرالذکر دائروں کو اصلی چھوٹے دائروں کے متمم دائرے کہا جائے تو نتیجہ کو ہم زیادہ اختصار کے ساتھ یوں بیان کر سکتے ہیں :- دو دائروں کے بیرونی مشترک مماس موجود ہونگے اگر ان کے متمم دائرے ایک دوسرے کو قطع کریں ورنہ نہیں ۔

انتہائی صورت میں جبکہ ضہ ' ا - ب کے مساوی ہو جاتا ہے تو دونوں بیرونی مشترک مماس منطبق ہوتے ہیں' چھوٹے دائروں کے ساتھ ان کے نقاط تماس بھی منطبق ہوتے ہیں اور شکل ایک بڑا دائرہ اور دو چھوٹے دائروں میں تبدیل ہو جاتی ہے جس میں تینوں دائرے ایک دوسرے کو اندرونی طور پر ایک ہی نقطہ پر مس کرتے ہیں -

دوسری انتہائی صورت میں جبکہ ضہ ' π - (ا + ب) کے مساوی ہو جاتا ہے مشترک مماس یہاں بھی منطبق ہوتے ہیں لیکن چھوٹے دائروں میں سے ایک کے ساتھ ان کے نقاط تماس دوسرے دائرہ کے ساتھ ان کے نقاط تماس پر منطبق نہیں ہوتے - یہ نقاط تماس دراصل ایک دوسرے کے متقاطر ہوتے ہیں اور چھوٹے دائرے عام طور پر ایک دوسرے کو مس نہیں کرتے - تاہم ہر ایک دائرہ دوسرے کے تحت قدمی دائرہ سے بیرونی تماس رکھتا ہے - ہندسہ مستوی میں اس صورت کے جواب میں کوئی صورت نہیں ہے -

اگر ایک بڑا دائرہ دو دیے ہوئے چھوٹے دائروں کو مس کرے اور یہ دائرے بڑے دائرہ کی متضاد جوانب واقع ہوں تو شکل کی نوعیت وہی ہوگی جو شکل (۲) کی ہے۔ اس صورت میں بڑے دائرہ کو ہم اندرونی مشترک مماس کہہ سکتے ہیں۔ یہاں مثلث ا و ب کے ضلع ½ π - ا، ½ π + ب اور ضہ ہو جاتے ہیں اور مثلث کے وجود کے امکان کے لئے یہ ضروری ہے کہ

و ا + ا ب > و ب، اور و ا + و ب > ا ب

یا ضہ > ا + ب، اور ضہ < π - (ا - ب)

انتہائی صورت میں جبکہ ضہ، ا + ب کے مساوی ہو جائے اندرونی مشترک مماس منطبق ہوتے ہیں اور دونوں چھوٹے دائرے ایک دوسرے کو (بیرونی طور پر) اور بڑے دائرہ کو ایک ہی نقطہ پر مس کرتے ہیں۔

دوسری انتہائی صورت میں بھی جبکہ ضہ، π - (ا - ب) کے مساوی ہو جاتا ہے دونوں اندرونی مشترک مماس منطبق ہوتے ہیں لیکن شکل ایسے دو چھوٹے دائروں پر مشتمل ہوتی ہے جو ایک دوسرے کو ہرگز قطع نہیں کرتے اور بڑے دائرہ کو ایسے نقطوں پر مس کرتے ہیں جو متقاطر ہیں۔ ہر دائرہ دوسرے کے تحت قدمی دائرہ سے اندرونی تماس رکھتا ہے۔

امثلہ نمبری (۱۲)

ذیل کے مسئلوں کے ثبوت Gudermann کی Niedere spharik میں دیے گئے ہیں۔ ان کو یہاں مشقوں کے طور پر درج کیا گیا ہے کیونکہ جو طالب علم ہندسہ مستوی کے طریقوں سے واقفیت رکھتا ہے وہ ان کو بطور خود ثابت کرنے میں کوئی مشکل محسوس نہیں کرے گا۔

(۱) دو کروی مثلثوں کے گھیرے مساوی ہوتے ہیں اگر ان کا زاویہ راس ایک ہی ہو اور اس کے مقابل کا جانبی دائرہ بھی ایک ہی ہو۔

(۲) مثلث ا ب ج کے بیرونی دائرہ کے نقطہ ا پر کا ماس ا ج اور ا ب کے ساتھ ایسے زاویے بناتا ہے جنکا فرق زاویوں ب اور ج کے فرق کے مساوی ہے۔

(۳) اگر ایک چھوٹے دائرہ کے بیرونی نقطہ ن سے دو مماسی قوسیں ن ا، ن ب اور ایک قاطع ن ج د کھینچے جائیں اور اگر ج پر کی مماسی قوس، ن ا، ن ب اور ا ب کو بالترتیب نقاط م، ل، اور ع پر قطع کرے تو (۴۶)

جب ع ل جب ج م = جب ع م جب ل ج

[تعریف - جب بڑے دائرہ کے چار نقطوں میں یہ ربط پایا جائے تو ہم یہ کہینگے کہ دائرہ کی موسیقی تقسیم ہوئی ہے اور یہ چار نقطے **موسیقی سعت** کو تعبیر کرتے ہیں۔]

(۴) اگر اس سے پہلے کے سوال کی ترقیم کو برقرار رکھا جائے اور ا ب، ج د کو نقطہ ع پر قطع کرے تو ج اور د، ن ع کو موسیقی طور پر تقسیم کرتے ہیں۔

(۵) نیز ثابت کرو کہ

$$\text{جب}^2 \tfrac{1}{2}\ \text{ا ن ب} = \frac{\text{جب ا م}}{\text{جب م ن}} \times \frac{\text{جب ب ل}}{\text{جب ل ن}}$$

(۶) اگر ا ب ایک چھوٹے دائرہ کا قطر ہو اور ا اور ب پر کی مماسی قوسیں کسی دوسری مماسی قوس کو بالترتیب م اور ن پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب}^2 \tfrac{1}{2}\ \text{ا ب} = \text{س ا م س ب ن}$$

(۷) ا ب ج ایک کروی مثلث ہے اور ایک چھوٹا دائرہ ب ج کو پ اور پَ پر، ج ا کو ق اور قَ پر، ا ب کو ر اور رَ پر قطع کرتا ہے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب اق جب اقَ}}{\text{جم}^2\,\tfrac{1}{2}\,\text{ق قَ}}=\frac{\text{جب ار جب ارَ}}{\text{جم}^2\,\tfrac{1}{2}\,\text{ر رَ}}$$

اور

$$\frac{\text{جب ب پ جب ب پَ}}{\text{جب ج پ جب ج پَ}}\times\frac{\text{جب ج ق جب ج قَ}}{\text{جب اق جب اقَ}}\times\frac{\text{جب ار جب ارَ}}{\text{جب ب ر جب ب رَ}}=1$$

(۸) ایک کروی مسدس ایک چھوٹے دائرہ میں کھینچا گیا ہے۔ اس کے متقابلہ ضلع ایسے نقطوں پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں جو سب کے سب ایک ہی بڑے دائرہ پر واقع ہوتے ہیں۔

(۹) اگر کروی مثلث ا ب ج کے راسوں سے ایک چھوٹے دائرہ کے مماس ا پ، ا پَ، ب ق، ب قَ، ج ر، ج رَ ہوں تو

$$\frac{\text{جب ب ا پ جب ب ا پَ}}{\text{جب ج ا پ جب ج ا پَ}}\times\frac{\text{جب ا ج ر جب ا ج رَ}}{\text{جب ب ج ر جب ب ج رَ}}\times\frac{\text{جب ج ب ق جب ج ب قَ}}{\text{جب ا ب ق جب ا ب قَ}}=1$$

(۱۰) اگر چار بڑے دائرے جو نقطہ و میں سے گذرتے ہیں دو دوسرے بڑے دائروں کو بالترتیب ا، ب، ج، د اور اَ، بَ، جَ، دَ پر قطع کریں تو

$$\frac{\text{جب اب جب ج د}}{\text{جب اج جب ب د}}=\frac{\text{جب او ب جب ج و د}}{\text{جب او ج جب ب و د}}=\frac{\text{جب اَبَ جب جَ دَ}}{\text{جب اَجَ جب بَ دَ}}$$

(۱۱) اگر ا ب ج د ایک بڑے دائرہ پر موسیقی سعت ہو اور م، ا ج کا نقطہ وسطی ہو تو

$$\text{مس}^2\,\text{م ج}=\text{مس م ب مس م د}$$

اور
$$\frac{\text{جب ۲ م ب}}{\text{جب ۲ م د}} = \left(\frac{\text{جب ا ب}}{\text{جب ا د}}\right)^{2}$$

(۱۴۷) (۱۲) ایک مکمل کروی ذو اربعۃ الاضلاع کے تین وتر ایک دوسرے کو موسیقی طور پر تقسیم کرتے ہیں۔

(۱۳) اگر ایک ہی چھوٹے دائرہ پر پانچ نقطے و، ا، ب، ج، د ہوں تو

$$\frac{\text{جب ½ اب جب ½ ج د}}{\text{جب ½ ب ج جب ½ ا د}} = \frac{\text{جب ا و ب جب ج و د}}{\text{جب ب و ج جب ا و د}}$$

(۱۴) ایک کروی ذو اربعۃ الاضلاع ایک دائرہ میں کھینچا گیا ہے۔ اس کے وتر ا ج، ب د ایک دوسرے کو نقطہ ع پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب ا ع}}{\text{جب ع ج}} = \frac{\text{جب ½ اب جب ½ ا د}}{\text{جب ½ ب ج جب ½ د ج}}$$

اور

$$\frac{\text{جب ½ ا ج}}{\text{جب ½ ب د}} = \frac{\text{جب ½ اب جب ½ ا د + جب ½ ب ج جب ½ د ج}}{\text{جب ½ اب جب ½ ب ج + جب ½ ا د جب ½ د ج}}$$

(۱۵) اگر ایک کروی مسدس ا ب ج د ع ف ایک دائرہ میں کھینچا جائے اور اگر ا د، ب ع، ج ف ایک نقطہ میں ملیں تو

$$\text{جب ½ اب جب ½ ج د جب ½ ع ف}$$
$$= \text{جب ½ ب ج جب ½ د ع جب ½ ف ا}$$

(۱۶) اگر دو دائرے ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کریں تو ان میں سے کسی دائرہ کے مرکزیں سے گذرنے والا کوئی بڑا دائرہ ان کے محیطوں سے نیم موسیقی طور پر (Semi-harmonically) تقسیم ہوتا ہے۔ یعنی اگر سعت پ ر ق س ہو تو

$$\text{جب ½ پ ر جب ½ ق س} = \text{جب ½ ق ر جب ½ پ س}$$

(۱۷) ایک دائرہ جس کا قطب پ ہے تین دائروں ا، ب، ج کو بیرونی طور پر مس کرتا ہے اور دوسرا دائرہ جس کا قطب ق ہے ا، ب، ج کو اندرونی طور پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ قوس پ ق، ا، ب، ج میں سے دو دو کے بنیادی بڑے دائروں کے نقطہ مشترک میں سے گذرتی ہے۔

(۱۸) اگر دو دائرے دوسرے دو دائروں کو مس کریں تو ایک زوج کا مرکز مشابہت (Similitude) دوسرے زوج کے بنیادی دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔

(۱۹) دو دائرے جن کے نصف قطر جم$^{-1}$ عہ اور جم$^{-1}$ بہ ہیں ایک دوسرے کو بیرونی طور پر مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اِن کے مشترک ماسوں کا درمیانی زاویہ ہے

۲ جم$^{-1}$ [۲ $\sqrt{\text{عہ بہ} - ۱}$ / (عہ + بہ)]

(۱۴۸)

دسواں باب

کرہ پر کے بڑے اور چھوٹے دائروں سے متعلق مسئلوں کی ثنویت

۱۸۱ — بڑے دائرہ اور اس کے قطب کے درمیان جو رشتہ ہے وہ اس رشتہ کے قدرے مماثل ہے جو ہندسہ مستوی میں ایک خط مستقیم اور ایک دائرہ کے لحاظ سے اس کے قطب کے درمیان ہوتا ہے۔ پہلا رشتہ دوسرے سے بہت زیادہ سادہ ہے اور اس سے ایک ایسا طریقہ نکالا جا سکتا ہے جو اپنے اطلاق میں متکافی قطبوں کے طریقہ سے زیادہ سہل اور عام ہے۔

۱۸۲ — بڑے دائرے کے دو قطب ہوتے ہیں اور بعض اوقات ان کے درمیان امتیاز پیدا کرنا ضروری ہے۔ اس مقصد کے لئے بالعموم بڑے دائرہ کو ایک یا دوسری سمت میں ایک نقطہ کی حرکت سے مرتسم شدہ سمجھا جاتا ہے۔ اس سمت کا انتخاب بالکل اختیاری ہے لیکن جب ایک دفعہ اس کا تعین کردیا جائے تو پھر اس کی پابندی لازم ہے۔ اگر ہم ایک ایسے شخص کا تصور کریں جو کرہ کی سطح پر بڑے دائرہ کے ساتھ ساتھ منتخب کردہ سمت میں چل رہا ہو تو وہ قطب جو اس کی بائیں جانب واقع ہوگا بائیں جانبی قطب کہلائیگا اور دوسرا

دائیں جانبی قطب[1]۔ مثلاً اگر ہم زمین پر کے خط اُستواء کے بڑے دائرے کی سمت مغرب سے مشرق قرار دیں تو زمین کا قطب شمالی بائیں جانبی قطب ہوگا اور قطب جنوبی دائیں جانبی قطب

(۱۴۹) بڑے دائرہ کے قطب سے بالعموم بائیں جانبی قطب مراد ہوگا اور بوقت ضرورت دائرہ کی سمت کو ایک تیر (←) سے ظاہر کیا جائے گا۔

۱۸۳۔ کروی مثلث کے ضلعوں کے قطب، قطبی مثلث کے راس (دفعہ ۲۵ کی تعریف کے مطابق) اس وقت ہونگے جبکہ ضلعوں کی مقرر کردہ سمتیں ایسی ہوں کہ اگر کوئی شخص مثلث کے گرد ان سمتوں میں ضلعوں پر چکر لگائے تو مثلث کا رقبہ ہمیشہ اُس کی بائیں جانب واقع ہو

۱۸۴۔ چھوٹے دائروں کے قطبوں میں بھی اسی طرح امتیاز کیا جاسکتا ہے لیکن جب چھوٹے دائرہ کی کوئی سمت مقرر نہ کی گئی ہو تو اسکے قطب سے وہ قطب مراد ہوگا جو اس کے محیط سے قریب تر ہے۔

۱۸۵۔ اگر ہم کرہ پر کوئی نقطہ لیں تو اس کے جواب میں ایک بڑا دائرہ ہوگا جس کا بائیں جانبی قطب یہ نقطہ ہوگا بشرطیکہ ٹھیک سمت مقرر کردی گئی ہو۔ اس بڑے دائرہ کو اسکی مقررہ سمت کے ساتھ موجودہ بحث کے مقصد کے لئے اس نقطہ کا قطبی بڑا دائرہ کہا جائیگا یا اختصاراً صرف قطبی دائرہ

۱۸۶۔ دو بڑے دائروں کا درمیانی زاویہ وہ زاویہ ہے جو ان کے نقطہ تقاطع پر ان کی قوسوں کی مثبت سمتوں کے درمیان ہوتا ہے[2]۔

---

[1] گاس نے اس اہم امتیاز کی طرف توجہ دلائی (Disqu. Gen. Circa superficies curvas, 2, vi)
نیز دیکھو Schulz کی Spharik, 1. 12, اور Mobius کی Anal. Spharik 16 & 18

[2] Gauss, loc. cit.

۱۸۷ ۔ نقطوں اوران کے قطبی دائروں کی حسب ذیل خاصیتوں کی اب فوراً تصدیق ہوسکتی ہے :۔

(۱) اگر تین نقطے ایک بڑے دائرہ پر واقع ہوں تو ان کے قطبی دائرے ایک نقطہ میں سے گزرتے ہیں ۔

(۲) دو نقطوں کے درمیان (زاویٔ) فاصلہ ان کے قطبی دائروں کے زاویہ تقاطع کے مساوی ہوتا ہے ۔

(۳) اگر ا ' ب دو نقطے ہوں اور ا' ' ب' ان کے قطبی دائرے تو ا' اور ب' کے نقاط تقاطع ' ا اور ب کو ملانے والے بڑے دائرے کے قطب ہیں ۔ وہ نقطہ تقاطع جس پر ا سے ب تک مخالف سمت ساعت[1] گردش سے قوسوں کی مثبت سمتوں کے درمیان چھوٹا زاویہ بنتا ہے دائرہ ا ب کا قطب ہے جبکہ ا ب کی مثبت سمت ا سے ب تک چھوٹی قوس پر لیگئی ہو ۔ (۱۵۰)

(۴) اگر ایک متحرک نقطہ کرہ پر کوئی منحنی پ مرتسم کرے تو اس کا قطبی ہمیشہ ایک دوسرے منحنی ق کو مس کرتا ہے ۔ اور چونکہ پ پر کے کسی دو نقطوں کو ملانے والی قوس کا قطب ' ق پر کے دو متناظر کروی مماسوں کا نقطہ تقاطع ہے اس لئے پ پر کے ان دو نقطوں کو ایک دوسرے پر منطبق کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ق پر کے کسی نقطہ کا قطبی دائرہ منحنی پ کو مس کرتا ہے۔ پس پ اور ق کے درمیان ایک تشاکلی رشتہ ہے اور ایک منحنی دوسرے کا تشاکلی کہلا سکتا ہے

فی الحقیقت دو منحنی ' ایک دوسرے کے تحت قدمی ' ایسے ہیں جنمیں سے دونوں کو اُس نقطہ کا قطبی دائرہ مس کرتا ہے جو منحنی پ مرتسم کرتا ہے۔ ان میں سے ایک کے گرد نقطہ تماس اُسی جہت (Sense) میں (موافق

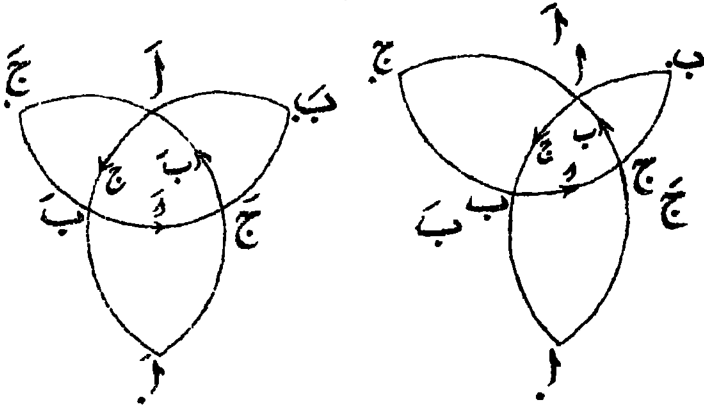
---

[1] اگر ہم کرہ کی سطح پر ایک گھڑی رکھیں جس کا رخ بیرونی جانب ہو تو سوئیاں جس سمت میں گردش کرتی ہیں ان کو **موافق سمت ساعت** کہتے ہیں اور اسکی متضاد سمت کو **مخالف سمت ساعت** ۔

یا مخالف سمت ساعت[1]) حرکت کرتا ہے جس میں پ کو مرتسم کرنے والا نقطہ حرکت کرتا ہے۔ دوسرے منحنی کے گرد نقطہ تماس مخالف جہت میں حرکت کرتا ہے۔ ان میں سے قبل الذکر منحنی کو ہم منحنی پ کا متکافی کہینگے؛ جب پ منحنی دائری یا بیضوی ہو تو اس کا تقعر اس بڑے دائرے کی بائیں جانب ہوتا ہے جو اس کو لمس کرتا ہے۔

(۵) چھوٹے دائرہ کا متکافی ایک دوسرا چھوٹا دائرہ ہوتا ہے۔ ان دو دائروں کا قطب ایک ہی ہے، اور ان کے کروی نصف قطروں کا مجموعہ ایک زاویہ قائمہ ہے[1]۔

۱۸۸ — اگر ہم ایک بڑے دائرہ کو یا اس کے کسی حصہ کو ایک چھوٹے حرف مثلاً ا سے تعبیر کریں جبکہ اس کی کسی ایک سمت کو مثبت قرار دیا گیا ہو تو اسی (۱۵۱) بڑے دائرہ کو یا اس کے حصہ کو الٹی سمت کے ساتھ اَ سے تعبیر کرنے میں سہولت ہوگی۔ نیز قوس ا اور قوس ب کے درمیانی زاویہ کو جو ا سے ب تک مخالف سمت ساعت ناپا گیا ہے (ا، ب) سے یا بعض اوقات اختصاراً صرف (اب) سے تعبیر کرنے میں بھی سہولت ہوگی۔



[1] ان اصطلاحات کا مفہوم بغیر مزید توضیح کے اس صورت میں مبہم ہو جاتا ہے جب ان کو ایسی شکل کے بڑے بند منحنیوں کے بیان میں استعمال کیا جائے جو ایک نصف کرہ میں نہیں آسکتیں۔ لیکن چھوٹے دائروں کے بیان میں ان کو استعمال کرنے سے وہ ابہام سے پاک ہیں۔

[1] Schulz's Spharik, I دفعہ ۴۴۔

۱۸۹ — اب ہم اُن رشتوں پر غور کرتے ہیں جو تین بڑے دائروں سے بنی ہوئی شکل اور اس کی تکافی شکل کے درمیان موجود ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ تین دائرے ا، ب، ج ہیں جن کی مثبت سمتیں شکل بالا میں ان دائروں پر تیروں کے ذریعہ ظاہر کی گئی ہیں۔ فرض کرو کہ ا ب ج وہ مثلث ہے جو ان دائروں سے بنتا ہے اور اَ ب ج، ا بَ ج، ا ب جَ ہم پھانکی مثلث ہیں۔

فرض کرو کہ ا، ب، ج کے قطب اَ، بَ، جَ ہیں اور فرض کرو کہ ان قطبوں کو بڑے دائروں اَ، بَ، جَ کے ذریعہ ملایا گیا ہے اور اس طرح قطبی مثلث اَ بَ جَ اور اس کے ہم پھانکی مثلث اَ بَ جَ، اَ بَ جَ، اَ بَ جَ حاصل ہوتے ہیں۔ تب اَ، بَ، جَ کے قطب ا، ب، ج ہیں جبکہ مقررہ سمتیں وہ ہوں جو بائیں جانب کی شکل (دیکھو صفحہ ۱۹۸) میں تیروں کے ذریعہ ظاہر کی گئی ہیں۔

یہ توجہ طلب ہے کہ تین بڑے دائروں سے بنا ہوا مثلث، متعدد منحنی مثلثی رقبوں میں سے صرف وہ ہے جو اپنے سب ضلعوں کی بائیں جانب واقع ہوتا ہے۔ اشکال بالا ایسی کھینچی گئی ہیں کہ نہ تو مثلث ا ب ج کے زاوئے اور نہ اسکے قطبی مثلث اَ بَ جَ کے زاوئے متداخلہ (Reenterant) ہیں۔ لیکن متداخلہ (۱۵۲)
زاویوں کو زیر بحث نظریہ میں شامل کرنے کی بالکل ضرورت نہیں ہے۔

۱۹۰ — اشکال زیر بحث میں سب سے پہلے جو چیز ہمارے ذہن میں آتی ہے وہ یہ ہے کہ زاویہ (ا، ب)، مثلث کا زاویہ ب ج ا نہیں ہے بلکہ اس کا تکملہ ب ج اَ ہے۔ اور چونکہ دو بڑے دائروں کا درمیانی زاویہ ان کے قطبوں کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہوتا ہے اس لئے

$$\text{اَ بَ} = (\text{ا، ب}) = \pi - \text{ج}$$

اور متکافی شکل میں

آ ج = (اَ بَ) = ا ب

یہ قطبی یا تکمیلی مثلثوں کی اساسی خاصیتیں ہیں ۔

۱۹۱ ۔ ہم نے یہ دیکھا ہے کہ اگر ایک دئے ہوئے چھوٹے دائرہ پر کوئی نقطہ واقع ہو تو اس کا قطبی بڑا دائرہ (اپنے مائیں جانب) ایک دوسرے چھوٹے دائرہ کو مس کرتا ہے ۔ اس لئے اگر ہم مثلث (ا ب ج) کے حائط دائرہ کا وجود مان لیں تو اس سے ہم یہ مستنبط کر سکتے ہیں کہ ایک چھوٹا دائرہ موجود ہے ایسا جو قوسوں بَ جَ، جَ اَ، اَ بَ کو مس کرتا ہے اور ان میں سے ہر ایک کی بائیں جانب واقع ہے ۔ یہ قطبی مثلث اَ بَ جَ کا اندرونی دائرہ ہے ۔ پس ہم مسئلہ ذیل پر پہنچتے ہیں :-

ایک مثلث کے حائط دائرہ کا قطب اس کے تکمیلی مثلث کے اندرونی دائرہ کے قطب پر منطبق ہوتا ہے اور ان دونوں دائروں کے کروی نصف قطر ایک دوسرے کے متمم ہوتے ہیں

اس نتیجہ سے ہم ر کی قیمت، س ر کی قیمت سے قطبی مثلث کے عناصر درج کر کے اخذ کر سکتے ہیں ۔

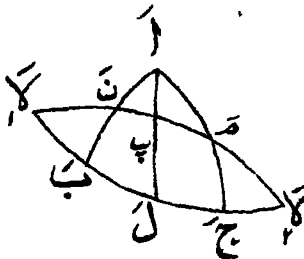
۱۹۲ ۔ اگر ہم بڑے دائرہ اکی مقررہ سمت بدل دیں یعنے اس بڑے دائرہ کو ۔ا تصور کریں تو اس سے اور بڑے دائروں ب اور ج سے مثلث اِ ب ج بنتا ہے ۔ ۔ا کا قطب اِ ہے اور اس لئے اِ ب ج اور اِ بَ جَ تکمیلی مثلث ہیں ۔ پس ہم نتیجہ ذیل حاصل کرتے ہیں :-

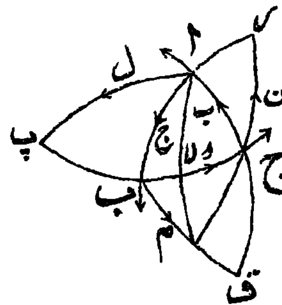
دئے ہوئے مثلث کے ہم پہلو مثلثوں میں سے ایک کے حائط دائرہ کا قطب تکمیلی مثلث کے ہم پہلو مثلثوں میں سے متناظر مثلث کے اندرونی دائرہ کے قطب پر منطبق ہوتا ہے

اور ان دونوں دائروں کے کروی نصف قطر ایک دوسرے کے متمم ہوتے ہیں۔

۱۹۳۔ اگر تین نقطے ا، ن، ب ایک بڑے دائرہ پر واقع ہوں اور ان کے قطبی بڑے دائرے اَ، نَ، بَ ہوں تو ا ن = (اَ نَ) ن ب = (نَ بَ) (۱۵۳)
پس اگر قوس ا ب کا نقطہ وسطی ن ہو تو ن وہ بڑا دائرہ ہے جو دائروں ا، ب کی مثبت سمتوں کے درمیانی زاویہ کی داخلی تنصیف کرتا ہے۔ اگر ن میں سے ایک قوس، اب کے علی القوائم کھینچی جائے تو اس قوس کے قطب، ن پر واقع ہوں گے اور ان کا فاصلہ، ا اور ب کے نقاط تقاطع سے، ایک ربع ہوگا۔

۱۹۴۔ فرض کرو کہ مثلث اَ بَ جَ کے ضلعوں کے نقاط وسطی لَ، مَ، نَ ہیں۔ ان نقطوں کے قطبی دائرے، بڑے دائرے ل، م، ن ہیں جو مثلث ا ب ج کے خارجہ زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ ل، م، ن بالترتیب ا، ب، ج کو قطع کرتے ہیں تو ان کے نقاط تقاطع (فرض کرو پ، ق، ر اور ان کے تحت قدمی نقطے) خطوط وسطی اَ لَ، بَ مَ، جَ مَ، (یا پ، ق، ر) کے قطب ہیں۔ اب پ، ق، ر، ایک نقطہ میں سے گذرتے ہیں (دفعہ ۱۶۰) اور اس لئے پ، ق، ر ایک بڑے دائرہ پر واقع ہوتے ہیں۔





نیز اگر لَ ، مَ ، نَ میں سے ایسی قوسیں کھینچی جائیں جو اَ ، بَ ، جَ
پر عمود ہوں تو یہ قوسیں ایک نقطہ پر یعنے اَ بَ جَ کے حائط دائرہ کے
قطب پر ملتی ہیں۔ پس وہ نقطے جو ل ، م ، ن پر ا ، ب ، ج سے علی الترتیب
ایک ربع فاصلہ پر واقع ہیں ایک بڑے دائرے پر واقع ہوتے ہیں جسکا
قطب ، ا ب ج کے اندرونی دائرہ کا قطب ہے۔

نیز قوس لا جو ب اور ج کے نقطہ تقاطع کو م اور ن کے نقطہ
تقاطع سے ملاتی ہے زاویہ ا کا اندرونی ناصف ہے اور اس لئے
ل کے علی القوائم ہے۔ پس مَ نَ اور بَ جَ کے نقاط تقاطع
لا۱ ، لا۲ کا فاصلہ لَ سے ایک ربع ہے۔

اور چونکہ لا جیسی تین قوسیں ایک نقطہ پر ملتی ہیں یعنے اس نقطہ (۱۵۴)
پر جو اَ بَ جَ کے اندرونی دائرہ کا قطب ہے اس لئے لا۱ جیسے
چھ نقطے ایک بڑے دائرہ پر واقع ہوتے ہیں جس کا قطب وہی ہے
جو اَ بَ جَ کے حائط دائرہ کا ہے۔

۱۹۵- لیکسل (Lexell) کا طریق اس طرح حاصل ہو سکتا ہے۔
ہم پہانکی مثلث ا ب ج کے اندرونی دائرہ پر نقطہ ا سے کھینچا ہوا
مماس طول میں چونکہ مثلث کے نصف گھیرے س کے مساوی ہے
اس لئے اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب مثلث کے ایک زاویہ کا محل
اور مثلث کا گھیرا دیا جائے تو اس زاویہ کے مقابل کا ضلع ہمیشہ دو چھوٹے
دائروں کو مس کرتا ہے یعنی ہم پہانکی مثلث کے اندرونی دائرہ کو اور اس
دائرہ کے تحت قدمی دائرہ کو۔ ان میں سے موخر الذکر دائرہ وہ دائرہ
ہے جو ا کے بائیں جانب واقع ہے اور اسلئے موجودہ بحث میں اسی کو
استعمال کیا جائیگا۔ اب اس مسئلہ کا تکافی مسئلہ لینے سے ہم یہ دیکھتے
ہیں کہ اگر مثلث کا ایک ضلع اور زاویوں کا مجموعہ دیا جائے تو اس ضلع کے
مقابل کا راس ہمیشہ ایک دائرہ پر واقع ہوتا ہے جو ہم پہانکی مثلث کے
حائط دائرہ کا تحت قدمی دائرہ ہے (دفعہ ۱۹۲) اور اس لئے ان نقطوں

میں سے گذرتا ہے جو دئے ہوئے ضلع کے سروں کے متقاطر ہیں۔ یہ دائرہ لیکسل کا طریق ہے[1]

۱۹۶ - مسائل ذیل ایک دوسرے کے تکافی ہیں۔

(۱) اگر کروی مثلث کے قاعدہ ب ج کا محل اور اسکا طول معلوم ہو اور نسبت
جب $\frac{1}{2}$ ب : جب $\frac{1}{2}$ ج دیجائے تو
ا کا طریق ایک چھوٹا دائرہ ہوتا ہے۔
(دفعہ ۱۶۶)

(۲) اگر ایک چھوٹے دائرہ میں چار ضلعی شکل کھینچی جائے تو اس کے متقابلہ زاویوں کے ایک زوج کا مجموعہ دوسرے زوج کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔
دفعہ (۱۶۸)

(۳) اگر چار زاوئی ا ب ج د ایک چھوٹے دائرہ میں کھینچا جائے تو
جب $\frac{1}{2}$ ا ب جب $\frac{1}{2}$ ج د،
جب $\frac{1}{2}$ ا ج جب $\frac{1}{2}$ ب د،
جب $\frac{1}{2}$ ب ج جب $\frac{1}{2}$ ا د،
میں سے دو حاصل ضربوں کا مجموعہ تیسرے کے مساوی ہوتا ہے۔

(اَ) اگر کروی مثلث کے زاویہ ا کا محل اور اسکی مقدار معلوم ہو اور نسبت
جم $\frac{1}{2}$ ب : جم $\frac{1}{2}$ ج
دیجائے تو ب ج کا لفافہ ایک چھوٹا دائرہ ہوتا ہے۔

(۲َ) اگر ایک چھوٹے دائرہ کے گرد چار ضلعی شکل کھینچی جائے تو اس کے متقابلہ ضلعوں کے ایک زوج کا مجموعہ دوسرے زوج کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

(۳َ) اگر چار بڑے دائرے اَ، بَ، جَ، دَ (۱۵۵)
سب کے سب ایک ہی چھوٹے دائرہ کو مس کریں اور اگر ان دائروں کی تقرشیں ایسی ہوں کہ یہ چھوٹا دائرہ ہر بڑے دائرہ کے بائیں جانب واقع ہو تو
جب $\frac{1}{2}$ (اَ بَ) جب $\frac{1}{2}$ (جَ دَ)،
جب $\frac{1}{2}$ (اَ جَ) جب $\frac{1}{2}$ (بَ دَ)،
جب $\frac{1}{2}$ (بَ جَ) جب $\frac{1}{2}$ (اَ دَ)،

[1] لیکسل کے مسئلہ کا تکافی مسئلہ جس سے ہم لیکسل کا مسئلہ اخذ کرتے ہیں Sorlin نے سب سے پہلے Gergonne's Annales de Mathematiques کے پندرھویں باب صفحہ ۳۰۳ میں شائع کیا۔

میں سے دو حاصل ضربوں کا مجموعہ تیسرے کے مساوی ہوتا ہے۔

(۴) اگر ایک کروی مثلث کے دو ضلع دئے جائیں (جنکا مجموعہ > ۱۸۰°) تو رقبہ بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ تیسرا ضلع حائط دائرہ کا قطر ہو۔

(۴) اگر ایک کروی مثلث کے دو زاوئے دئے جائیں (جنکا مجموعہ > ۱۸۰°) تو گھیرا کم سے کم ہوگا جبکہ تیسرا زاویہ اندرونی دائرہ کے قطر کے مساوی ہو۔

(دفعات ۱۵۵، ۱۵۶)

۱۹۷ — چھوٹے دائروں سے متعلق دیگر مسائل پر بحث کرنے سے پیشتر یہ بہتر ہوگا کہ چھوٹے دائروں کے مماسوں اور وتروں کی مکافات (Reciprocation) پر اختصاراً غور کیا جائے۔

اگر ایک نقطہ پ میں سے ہم ایک بڑا دائرہ لا کھینچیں جو دئے ہوئے چھوٹے دائرہ س کو نقاط ا اور ب پر قطع کرے تو شکل کے مختلف عنصروں کے متکافیات (Reciprocals) حسب ذیل ہیں:—

س کے متناظر دوسرا چھوٹا دائرہ سَ ہے۔ پ کا متکافی ایک بڑا دائرہ پَ ہے اور لا کا متکافی ایک نقطہ لاَ ہے بڑے دائرہ پَ پر۔ ا اور ب کے متکافیات بڑے دائرے اَ، بَ ہیں جو لاَ سے دائرہ سَ کو مس کرتے ہوئے کھینچے گئے ہیں۔ اس لئے

پ ا = (پَ اَ)، پ ب = (پَ بَ)، ا ب = (اَ بَ)۔

اگر س اور سَ کا مشترک قطب و ہو تو پ و اس فاصلہ کے متمم کے مساوی ہے جو پَ کو و سے ہے ہم ان رشتوں کو مسئلوں کے حسب ذیل زوج میں اختصاراً بیان کرسکتے ہیں:—

اگر بڑے دائرہ کی ایک متغیر قوس ایک ثابت نقطے پ میں سے گذرے

اگر ایک ثابت بڑے دائرہ پ ل پر کے متغیر نقطے پ میں سے ایک دئے ہوئے

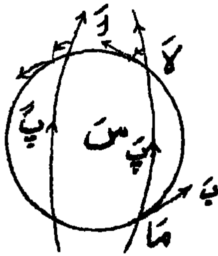
---

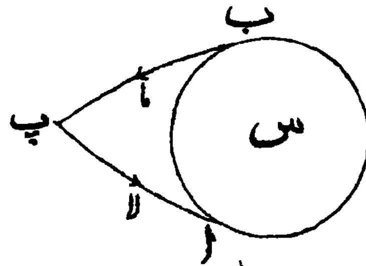
^۱ Baltzer, Sterometries IV, 17,

اور ایک دئے ہوئے چھوٹے دائرہ کو ا اور ب پر قطع کرے تو حاصل ضرب مس $\frac{1}{2}$ پ ا مس $\frac{1}{2}$ پ ب کی قیمت مستقل ہوتی ہے۔

چھوٹے دائرہ کے دو کروی مماس پ ع، اور ف پ کھینچے جائیں تو حاصل ضرب مس $\frac{1}{2}$ ن پ ع مم $\frac{1}{2}$ ن پ ف کی قیمت مستقل ہوتی ہے۔

۱۹۸ — اگر ایک نقطے پ میں سے بڑے دائرے لا اور ما کھینچے (۱۵۶)
جائیں جو ایک چھوٹے دائرہ س کو علی الترتیب نقطوں ا اور ب پر مس کرتے ہیں تو متکافی شکل میں ایک بڑا دائرہ پَ ہوتا ہے جو ایک چھوٹے دائرہ سَ کو نقطوں لاَ اور مَا پر قطع کرتا ہے اور ان نقطوں پر دائرہ سَ کے کروی مماس علی الترتیب بڑے دائرے اَ اور بَ ہیں۔ اور اب یہ معلوم ہوتا ہے کہ قوس پ ا، زاویہ (پَ اَ) کے مساوی ہے یعنے اس زاویہ کے جو بڑے دائرہ پَ اور چھوٹے دائرہ سَ کے نقطہ لاَ پر کے مماس کے درمیان ہے۔ فی الواقع یہ وہ زاویہ ہے جسپر قوس پَ چھوٹے دائرہ سَ کو قطع کرتی ہے۔ لیکن اس زاویہ کو محسوب کرنے میں سب سے اہم یہ بات یاد رکھنی چاہئے کہ مماسی قوس اَ کی مثبت سمت ایسی ہے کہ چھوٹا دائرہ اس کی بائیں جانب واقع ہوتا ہے۔ ہم اس زاویہ کی تعریف اس طرح کرینگے کہ وہ پَ سے اَ تک گردش کی مقدار ہے اور اس کو مثبت سمجھینگے جبکہ گردش مخالف سمت ساعت ہو۔





اِس قرار داد کے مطابق یہ معلوم ہوگا (جیساکہ اوپر کی شکل میں دکھایا گیا ہے) کہ بڑے اور چھوٹے دائروں کا زاویہ تقاطع لا پر مثبت اور ما پر منفی ہے عین ایسے ہی جیسے قوس پ ا بڑے دائرہ لا کی مثبت سمت میں ہے اور قوس پ ب بڑے دائرہ ما کی منفی سمت میں۔ اس طرح اِس قرار داد کو ذیل کی شکل میں منضبط کیا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ ایک نقطہ بڑے دائرہ پ پر سفر کرتے ہوئے چھوٹے دائرہ سَ میں نقطہ مَا پر داخل ہوتا ہے اور اس سے نقطہ لَا پر خارج ہوتا ہے تو سَ اور چھوٹے دائرہ کا زاویہ تقاطع مخالف سمت ساعت گردش کی وہ مقدار ہے جو بڑے دائرہ سے چھوٹے دائرہ کے اُس مماس تک وقوع پذیر ہوتی ہے جو نقطہ خروج پر کھینچا گیا ہے۔

اشکال بالا میں پ ایسے مقام پر ہے جسکا فاصلہ س اور سَ کے مشترک قطب سے ایک ربع سے کم ہے؛ اسلئے یہ قطب، پَ کی بائیں جانب واقع ہے اور زاویہ تقاطع حادہ ہے۔ لیکن اگر پ، چھوٹے دائروں کے مشترک قطب سے ایک ربع سے زیادہ فاصلہ پر واقع ہوتا تو یہ قطب، پَ کی دائیں جانب ہوتا (مثلاً شکل میں پؔ) اور زاویہ تقاطع منفرجہ ہوتا۔ (۱۵۷)

۱۹۹ — دو چھوٹے دائروں کا زاویہ تقاطع وہ زاویہ ہے جو ان دائروں کے نقاط تقاطع میں سے کسی ایک پر کے ماسی بڑے دائروں کے درمیان بنتا ہے جبکہ ہر مماس کی مقررہ سمت ایسی ہو کہ متناظر چھوٹا دائرہ اس کی بائیں جانب واقع ہو۔ اس طرح مثال کے طور پر، دو چھوٹے دائروں کا زاویہ تقاطع صفر ہوگا جبکہ انکا تماس اندرونی ہو لیکن π کے مساوی ہوگا جبکہ اِن کا تماس بیرونی ہو۔

یہ فوراً معلوم ہو جائے گا کہ دو چھوٹے دائروں کا زاویہ تقاطع

ان کے تنکافیوں کے بیرونی مشترک مماس کے طول کے مساوی ہوتا ہے۔ شلاً، اگر دو دائرے ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کریں تو انکے تنکافیوں کے مشترک مماس کا طول ایک ربع ہے۔ اگر دو دائرے اندرونی طور پر ایک دوسرے کو مس کریں تو ان کے تنکافی بھی اندرونی طور پر مس کرتے ہیں۔ اگر دو دائرے بیرونی طور پر مس کریں تو ان کے تنکافیوں کے مشترک مماس کا طول نیم دائرہ ہے پس یہ تنکافی، ایک ہی بڑے دائرہ کو، اس کی ایک ہی جانب، متقاطر نقطوں پر مس کرتے ہیں۔

۲۰۰ — ہم محوری نظام کے دائروں سے متعلق جتنے مسائل اوپر بیان ہوچکے ہیں (دفعات ۱۷۴ تا ۱۷۸) اُن سب کے جواب میں تنکافی مسئلے اب بیان کئے جا سکتے ہیں اور ہمیں اس طرح، کرہ پر کے چھوٹے دائروں کے ایک اور نظام کے خواص ملتے ہیں۔ ہم دائروں کے اس نئے نظام کو ہم پھانکی نظام کہینگے کیونکہ وہ تمام دائرے جو اس نظام سے متعلق ہوتے ہیں کروی مماسوں کا ایک زوج رکھتے ہیں خواہ یہ مماس خیالی ہوں یا حقیقی اور اس لئے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ یہ سب ایک ہی پھانک کے اندر کھینچے گئے ہیں۔ ذیل میں دائیں جانب ثابت کردہ مسئلے اور بیان کردہ تعریفیں دی گئی ہیں؛ بائیں جانب تنکافی مسائل اور تعریفیں درج ہیں:—

(۱) اُن نقطوں کا طریق جن سے دو دیئے ہوئے چھوٹے دائروں کے کروی مماس مساوی ہوں ایک بڑا دائرہ ہوتا ہے۔ دفعہ (۱۷۴)

(۲) اس بڑے دائرہ کو ان دو دیئے ہوئے دائروں کا بنیادی دائرہ

(اَ) وہ تمام بڑے دائرے، جو دو دیئے ہوئے چھوٹے دائروں کو ایک ہی زاویہ پر قطع کرتے ہیں متقاطر نقطوں کے ایک خاص زوج میں سے گذرتے ہیں (۱۵۸)

(۲َ) اِن نقطوں کو ہم دیئے ہوئے دو دائروں کے "مشابہت کے

کہتے ہیں ۔

(۳) بنیادی دائرہ اُس قوس کے علی القوائم ہوتا ہے جو دیے ہوئے دائروں کے قطبوں کو ملاتی ہے ۔

(۴) اگر دائروں کے قطب ا، ب اور ان کے نصف قطر ا، ب ہوں اور اب کے ساتھ بنیادی دائرہ کا تقاطع و ہو تو

$$\frac{\text{جم و ا}}{\text{جم ا}} = \frac{\text{جم و ب}}{\text{جم ب}}$$

(۵) و کو اِن دو دائروں کا محوری مرکز کہتے ہیں ۔

(۶) دائروں کا ایسا نظام جس میں دائروں کے تمام زوجوں کا بنیادی دائرہ ایک ہی ہو دائرونکا ہم محوری نظام کہلاتا ہے ۔ (دفعات ۱۷۵ تا ۱۷۸) ۔

(۷) اگر ہم محوری نظام کے دائروں کے قطب ا، ب، ج، وغیرہ اور نصف قطر ا، ب، ج، وغیرہ ہوں تو

(۱) ا، ب، ج وغیرہ ایک ہی بڑے دائرہ پر واقع ہونے چاہئیں (یعنے مرکزوں کے دائرہ پر) ۔

(۲) اس بڑے دائرہ پر ایک

بیرونی مرکز" کہینگے ۔

(۳َ) مشابہت کے مرکز اس بڑے دائرہ پر واقع ہوتے ہیں جو دیے ہوئے دائروں کے قطبوں کو ملاتا ہے ۔

(۴َ) اگر دائروں کے قطب ا، ب اور ان کے نصف قطر ا، ب ہوں اور بڑے دائرہ اب پر وہ نقطہ و ہو جو مشابہت کے مرکزوں کے درمیان وسط میں واقع ہے تو

$$\frac{\text{جم و ا}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{جم و ب}}{\text{جب ب}}$$

(۵َ) و کو ہم اِن دو دائروں کا پھانکی مرکز کہیں گے ۔

(۶َ) دائروں کا ایسا نظام جس میں دائروں کے تمام زوجوں کے مشابہت کے بیرونی مرکز وہی ہوں دائروں کا ہم پھانکی نظام کہلائے گا ۔

(۷َ) اگر ہم پھانکی نظام کے دائروں کے قطب ا، ب، ج، وغیرہ اور نصف قطر ا، ب، ج وغیرہ ہوں تو

(۱َ) ا، ب، ج، وغیرہ ایک ہی بڑے دائرہ پر واقع ہونے چاہئیں (یعنے مرکزوں کے دائرہ پر) ۔

(۲َ) اس بڑے دائرہ پر ایک خاص

خاص نقطہ و (محوری مرکز) ہے ایسا کہ

$$\frac{\text{جم و ا}}{\text{جم ا}} = \frac{\text{جم و ب}}{\text{جم ب}} = \frac{\text{جم و ج}}{\text{جم ج}}$$

= ...... = ک (فرض کرو)۔

(۳) بنیادی دائرہ پر کے کسی نقطہ پ سے نظام کے تمام دائروں کے مماس مساوی ہوتے ہیں۔

(۴) وہ دائرہ جس کا قطب پ جیسا نقطہ ہو اور جس کا کروی نصف قطر مماس کا مشترک طول ہو نظام کے تمام دائروں کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

(۵) جب مقدار ک جسکی تعریف اوپر بیان ہو چکی ہے ایک سے بڑی ہو تو نظام کے تمام دائرے دو حقیقی مشترک نقطوں میں سے گذرتے ہیں۔

(۶) جب ک اکائی سے چھوٹا ہو تو نظام کے کوئی دو دائرے ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے۔

(۷) جب ک اکائی سے چھوٹا ہو تو دائروں کے نظام میں دو نقطہ

نقطہ و (پھانکی مرکز) ہے ایسا کہ

$$\frac{\text{جم و ا}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{جم و ب}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{جم و ج}}{\text{جب ج}}$$

= ...... = ک (فرض کرو)

(۳) کوئی بڑا دائرہ پ جو مشابہت کے مرکزوں میں سے گذرے نظام کے تمام دائروں کو ایک ہی زاویہ پر قطع کرتا ہے۔

(۴) نظام کے کسی دائرہ اور ایک ایسے (۱۵۹)
دائرہ کے مشترک مماس کا طول ایک ربع ہوتا ہے جس کا قطب 'پ' جیسے بڑے دائرہ کا قطب ہے اور جس کا نصف قطر 'پ' کے ساتھ دائروں کے مشترک زاویہ تقاطع کا متمم ہے۔

(۵) جب مقدار ک جسکی تعریف اوپر بیان ہو چکی ہے ایک سے بڑی ہو تو نظام کے تمام دائروں کے وہی دو حقیقی مشترک مماسی بڑے دائرے ہوتے ہیں۔

(۶) جب ک اکائی سے چھوٹا ہو تو نظام کے کسی دو دائروں کا بیرونی مشترک مماسی بڑا دائرہ نہیں ہوتا۔

(۷) جب ک اکائی سے چھوٹا ہو تو دائروں کے نظام میں دو بڑے دائرے

دائرے ہوتے ہیں یعنے صفر نصف قطر
کے دائرے۔ انکو انتہائی نقطے
کہا جاتا ہے۔ یہ نقطے محوری مرکز
کے لحاظ سے متشاکلاً واقع ہوتے ہیں

(۸) خود بنیادی دائرہ ہم محوری
نظام کا ایک دائرہ ہوتا ہے۔

(۹) جب دو دائرے اندرونی
طور پر یا بیرونی طور پر ایک دوسرے
کو مس کریں تو محوری مرکز اور
انتہائی نقطے نقطہ تماس پر منطبق
ہوتے ہیں اور نظام کے تمام دائرے
اس نقطہ پر ایک دوسرے کو اندرونی
طور پر یا بیرونی طور پر مس کرتے ہیں۔
یہ وہ صورت ہے جبکہ ک = ۱
یہ دراصل (۵) اور (۶) کے
درمیان صورت مرور ہے۔

ہوتے ہیں۔ ان کو ہم انتہائی دائرے
کہینگے۔ یہ دائرے پہانگی مرکز کے
لحاظ سے متشاکلاً واقع ہوتے ہیں۔

(۸َ) ہم پہانگی نظام میں دو نقطہ دائرے
ہوتے ہیں یعنے مشابہت کے مرکز۔

(۹َ) جب دو دائرے ایک ہی بڑے
دائرہ کو ایک ہی نقطے پر یا متقاطر نقطوں
پر مس کریں تو نظام کے انتہائی دائرے
ایک دوسرے پر اور اس بڑے دائرہ پر
منطبق ہوتے ہیں اور پہانگی مرکز اس کا
قطب ہوتا ہے۔ اس صورت میں
نظام ایسے دائروں پر مشتمل ہوتا ہے
جنمیں سے ہر ایک دائرہ انتہائی دائرے
کو متقاطر نقطوں میں سے یعنے مشابہت
کے مرکزوں میں سے ایک یا دوسرے
نقطہ پر مس کرتا ہے۔ اس طرح
نظام کا ہر دائرہ ہر دوسرے کو اندرونی
طور پر مس کرتا ہے یا اپنے تحت قدمی
دائرہ کو بیرونی طور پر مس کرتا ہے۔
یہ وہ صورت ہے جبکہ ک = ۱ یہ
دراصل (۵َ) اور (۶َ) کے درمیانی
صورت مرور ہے۔

۱۶ (۸) تین چھوٹے دائروں میں سے
دو دو کے بنیادی دائرے ایک

(۸َ) تین چھوٹے دائروں میں سے
دو دو کے بیرونی مشابہت کے مرکز

نقطہ پر ملتے ہیں۔

(۹) ایک دائرہ کھینچا جا سکتا ہے جو تین دیے ہوئے دائروں کو علی القوائم قطع کرے۔

(۱۰) ایک دائرہ کھینچا جا سکتا ہے ایسا کہ تین دئے ہوئے نقطوں سے اس کے مماس دے ہوئے طولوں کے مساوی ہوں۔

(۱۱) اگر ہم محوری نظام کے تین دائرے ا، ب، ج ہوں اور ج پر کے کسی متغیر نقطہ پ سے ا اور ب پر مماس پ ل، پ م کھینچے جائیں تو

$$\frac{\text{جب}^2 \frac{1}{2}\,\text{پ ل}}{\text{جب}^2 \frac{1}{2}\,\text{پ م}} = \frac{\text{جب ا ج}}{\text{جب ب ج}} \times \frac{\text{جم ب}}{\text{جم ا}}$$

اور اس لئے مستقل ہے خواہ پ دائرہ ج پر کہیں واقع ہو۔

(۱۲) اگر کسی دائرہ پر تین نقطے ا، ب، ج ہوں اور کسی دوسرے دائرہ پر مماس ا الا، ب ما، ج ہے ہوں اور اگر حاصل ضرب

جب ½ الا جب ½ ب ج،

جب ½ ب ما جب ½ ج ا،

ایک بڑے دائرہ پر واقع ہوتے ہیں۔

(۹ آ) ایک دائرہ کھینچا جا سکتا ہے جس کا فاصلہ تین دیے ہوئے چھوٹے دائروں میں سے ہر ایک سے ایک ربع ہو جب اس فاصلہ کو بیرونی مشترک مماس پر ناپا جائے۔

(۱۰ آ) ایک دائرہ کھینچا جا سکتا ہے ایسا کہ تین دے ہوئے بڑے دائروں کو دے ہوئے زاویوں پر قطع کرے۔

(۱۱ آ) اگر ہم بھاگی نظام کے تین دائرے ا، ب، ج ہوں اور دائرہ ج کا کوئی متغیر مماس ا اور ب کو زاویوں عہ اور بہ پر قطع کرے تو

$$\frac{\text{جب}^2 \frac{1}{2}\,\text{عہ}}{\text{جب}^2 \frac{1}{2}\,\text{بہ}} = \frac{\text{جب ا ج}}{\text{جب ب ج}} \times \frac{\text{جب ب}}{\text{جب ا}}$$

اور اس لئے مستقل ہے خواہ دائرہ ج کا کوئی مماس لیا جائے۔

(۱۲ آ) اگر تین بڑے دائرے ا، ب، ج ایک چھوٹے دائرہ کو مس کریں اور دوسرے چھوٹے دائرہ کو زاویوں عہ، بہ، جہ پر بالترتیب قطع کریں اور اگر حاصل ضرب

جب ½ عہ جب ½ (ب ج)،

جب ½ بہ جب ½ (ج ا)،

جب ½ ج ۔ جب ½ اب،
میں سے کسی دو کا مجموعہ تیسرے کے
مساوی ہو تو دائرے ایک دوسرے
کو مس کرتے ہیں۔

جب ½ جہ جب ½ (اب)
میں سے کسی دو کا مجموعہ تیسرے کے
مساوی ہو تو چھوٹے دائرے ایک
دوسرے کو اندرونی طور پر مس
کرتے ہیں یا ایک دائرہ دوسرے
کے تحت قدمی دائرہ کو بیرونی طور پر
مس کرتا ہے۔

۲۰۱ — یہ ذہن نشین رہے کہ موجودہ بحث میں ہم نے پہلے سے یہ مان لیا ہے کہ ہم محوری نظام کے دائرے اس قید کی پابندی کرتے ہیں کہ ان کے قطب کبھی بھی محوری مرکز سے ایک ربع سے زیادہ فاصلہ پر واقع نہیں ہوتے؛ اور اس لئے ہم پھانکی نظام (۱۶۱) کے دائرے بھی دو بڑے دائروں سے بننے والی پھانکوں میں سے صرف ایک تک محدود رہتے ہیں۔ دوسرے الفاظ میں ہم نے ک کی صرف مثبت قیمتوں پر غور کیا ہے۔ کیونکہ اگر ہم مساوات جم و ا = ک جم ا پر غور کریں جہاں ک مثبت ہے تو ہم دیکھتے ہیں کہ اگر و ا > ½ π تو جم ا منفی ہے اور اس لئے ا > ½ π۔ پس ہمیں ربع سے بڑے نصف قطر والا ایک چھوٹا دائرہ ملتا ہے اور اس لئے ایک ایسا دائرہ جس پر (اگرچہ مختلف نقطہ نظر سے) اس کے قریب تر قطب کے سلسلہ میں بحث ہو چکی ہے۔ متذکرۂ صدر قید غیر ضروری ہے لیکن اس سے بحث میں اختصار پیدا ہوتا ہے۔ اگر ہم ابتدائی تعریفوں کی توسیع کریں اور ہر چھوٹے دائرہ کو گردش کی کوئی اختیاری سمت دیں اور خلاف سمت ساعت کی پابندی لازم نہ کریں جیسا کہ ہم نے اب تک کیا ہے تو ایک نظریہ فوراً قائم کیا جا سکتا ہے جو (ہم پھانکی نظام کی صورت میں) اندرونی مشابہت کے مرکزوں پر اسی طرح منطبق ہو سکیگا

جس طرح بیرونی مشابہت کے مرکزوں پر۔

لیکن یہ بھی یاد رہے کہ کرہ کے نصف قطر کو لامتناہی کردینے سے ہم مکافات کے طریقہ سے جس کی یہاں کرہ کے لئے شرح کی گئی ہے ایک مستوی پر کے نقطوں، خطوں، اور دائروں کی موثر مکافات اخذ نہیں کرسکتے۔ کیونکہ کرہ پر کسی شکل اور اس کی مکافی شکل میں بالعموم اتنا فصل ہوتا ہے جس کو ربع میں ناپا جاسکتا ہے اور اس لئے لامتناہی نصف قطر کے کرہ کی صورت میں ان کے درمیان لامتناہی فاصلہ ہوگا؛ اس لئے ایک مستوی پر مکافی شکلیں ایک دوسرے سے لامتناہی فاصلہ پر واقع ہوتی ہیں۔ مثلاً ہندسۂ مستوی میں ہم محور دائرے اور ہم بہائی دائرے مع ان خواص کے موجود ہوتے ہیں جو دفعہ ۲۰۰ میں شمار کردہ خاصیتوں سے آسانی کے ساتھ اخذ کیجا سکتی ہیں لیکن ہندسۂ مستوی میں کوئی ایسا صریح طریقہ موجود نہیں ہے جس سے کسی ایک نظام کے خواص دوسرے نظام سے اخذ کئے جاسکیں۔



گیارہواں باب (۱۶۲)

ہارٹ کا دائرہ

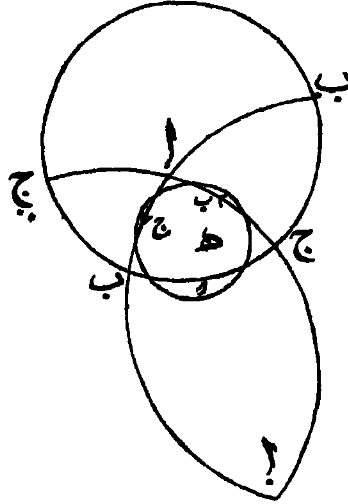
۲۰۲ — ہارٹ کا مسئلہ۔ ہندسہ مستوی کا یہ ایک مشہور مسئلہ ہے جس کو بالعموم (Feuerbach) کے نام سے منسوب کیا جاتا ہے کہ مثلث کے اندرونی و جانبی سب دائروں کو ایک دوسرا دائرہ مس کرتا ہے یعنی نو نقطی دائرہ ۔ اس مسئلہ کے جواب میں سر انڈریو ہارٹ (S.A. Hart) نے ۱۸۶۱ء میں کروی مثلثوں کیلئے ایک مماثل مسئلہ دریافت کیا جو اسی سال ریاضی کے کوارٹرلی جرنل (Quarterly Journal of Mathematics) میں مع ثبوت شائع ہوا۔[1] وہ مسئلہ یہ ہے کہ کروی مثلث اور اس کے ہم پہانگی مثلثوں کے سب اندرونی دائروں کو ایک چوتھا چھوٹا دائرہ مس کرتا ہے۔

دائروں کے ہم پہانگی نظام کی خاصیتوں سے ہم اس مسئلہ کا ثبوت، دفعہ ۲۰۰ (۲ آ) کے مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے اخذ کرینگے۔

---

[1] Extension of Terquem's Theorem respecting the circle which bisects the three sides of a triangle. Quarterly Journal, Vol. IV, P. 260.

۲۰۳ ـ فرض کرو کہ ایک کروی مثلث ا ب ج ہے جس میں ا ب سے چھوٹا نہیں ہے اور ب ج سے چھوٹا نہیں ہے ۔
ہم (دفعہ ۲۰۰، ۱۰ا) یہ دیکھ چکے ہیں کہ ایک چھوٹا دائرہ کھینچنا ہمیشہ ممکن ہے جو مثلث کے اضلاع ا، ب، ج کو دئے ہوئے زاویوں عہ، بہ، جہ پر قطع کرے اور نیز یہ کہ اگر عہ، بہ، جہ، یہ شرط پوری کریں کہ حاصل ضربوں
جب ½ عہ جب ½ (ب، ج) جب ½ بہ جب ½ (ج، ا) جب ½ جہ جب ½ (ا، ب)
میں سے کسی دو کا مجموعہ تیسرے کے مساوی ہے تو یہ کھینچا ہوا دائرہ ۱۶۳
مثلث کے اندرونی دائرہ کے ساتھ اندرونی تماس رکھیگا یا اندرونی دائرہ کے تحت قدمی دائرہ کے ساتھ بیرونی تماس (دفعہ ۲۰۰، ۱۲ا)



فرض کرو کہ ا، ب، ج کے تحت قدمی نقاط ءَ، بَ، جَ ہیں۔
اب چھوٹے دائرہ ھ پر غور کرو جو مثلث کے اضلاع ا، ب، ج کو زاویوں ب ـ ج، ا ـ ج اور ا ـ ب پر علی الترتیب قطع کرتا ہے۔
اب چونکہ (ب، ج) = π ـ ا اس لئے اوپر کے تینوں حاصل ضرب ہیں

جب $\frac{1}{2}$(ب - ج) جم $\frac{1}{2}$ ا ،

جب $\frac{1}{2}$(ج - ا) جم $\frac{1}{2}$ب ،

جب $\frac{1}{2}$(ا - ب) جم $\frac{1}{2}$ ج ،

اور یہ علی الترتیب

- $\frac{1}{2}$جب (س - ب) + $\frac{1}{2}$ جب (س - ج)،

$\frac{1}{2}$جب (س - ج) - $\frac{1}{2}$جب (س - ا)،

- $\frac{1}{2}$جب (س - ا) + $\frac{1}{2}$جب (س - ب)،

کے مساوی ہیں۔ اس طرح پہلے اور تیسرے کا مجموعہ دوسرے کے مساوی ہے۔ پس دائرہ ھ، اندرونی دائرہ کو اندرونی طور پر مس کریگا یا اسکے تحت قدمی دائرہ کو بیرونی طور پر۔ متساوی الاضلاع مثلث کی مخصوص صورت لینے سے ہمیں یہ معلوم ہوگا کہ دائرہ ھ اور مثلث کا
اندرونی دائرہ ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔ اس لئے عام (۱۶۴
صورت میں پہلی شق ہی درست ہوتی ہے[1] یعنی دائرہ ھ اندرونی دائرہ کو اندرونی طور پر مس کرتا ہے۔

۲۰۴- اب مثلث ا ب ج پر غور کرو جو بڑے دائروں ا، ب، اور ج سے بنتا ہے۔ وہی دائرہ ھ، ان بڑے دائروں کو بالترتیب زاویوں

ب - ج، π - (ا - ج)، اور π - (ا - ب)

پر قطع کرتا ہے اور اس لئے حاصل ضرب

جب $\frac{1}{2}$ ع جب $\frac{1}{2}$ (- ب، - ج)،

جب $\frac{1}{2}$ ب جب $\frac{1}{2}$ (- ج، ا)،

---

[1] ایک خاص صورت سے اس قسم کا نتیجہ اخذ کرنا، اگرچہ یقین آور ہے، لیکن اطمینان بخش نہیں۔ اس ابہام کا سبب چھوٹے دائرہ کی غیر مکمل تعریف ہے جو ابواب ماسبق میں قصداً اختیار کی گئی ہے۔ دیکھو دفعہ ۲۳۶۔

جب ½ ج جب ½ (ا - ب)،

اس صورت میں ہو جاتے ہیں

جب ½ (ب - ج) جم ½ ا،

جم ½ (ا - ج) جب ½ ب،

جم ½ (ا - ب) جب ½ ج،

جو ترتیب وار

- ½ جب (س - ب) + ½ جب (س - ج)،

½ جب (س - ج) + ½ جب (س - ا)،

½ جب (س - ا) + ½ جب (س - ب)،

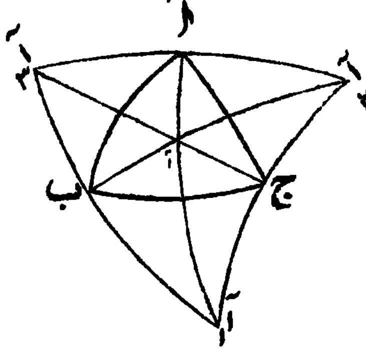
کے مساوی ہیں ۔ اس طرح پہلے اور تیسرے کا مجموعہ دوسرے کے مساوی ہے ۔ پس دائرہ ھ مثلث ا ب ج کے اندرونی دائرہ کے ساتھ اندرونی تماس رکھتا ہے یا اس کے تحت قدمی دائرہ کے ساتھ بیرونی تماس یعنے اس دائرہ کے ساتھ جو مثلث ا ب ج کے اندر کھینچا گیا ہے ۔ وہ خاص صورت لینے سے جب مثلث ا ب ج متساوی الاضلاع مثلث ہو ہم آسانی کے ساتھ اس نتیجہ پر پہنچ سکتے ہیں کہ صرف پہلی شق ہی قابل قبول ہے ۔

۲۰۵ ۔ اسی قسم کا استدلال مثلثات ا ب ج، اور ا ب ج پر جاری کرنے سے ہم یہ معلوم کرتے ہیں کہ دائرہ ھ، مثلث ا ب ج کے اندرونی دائرہ کو اندرونی طور پر مس کرتا ہے اور اس کے ہم پھانکی مثلثوں کے اندرونی دائروں کو بیرونی طور پر مس کرتا ہے ۔ اس طرح ہارٹ کا مسئلہ ثابت ہو گیا ۔ ہم اس دائرہ ھ کو ہارٹ کا دائرہ کہینگے ۔

۲۰۶ ۔ ہارٹ کے دائرہ کا نصف قطر معلوم کرنا ۔ ہارٹ کے دائرہ کا نصف قطر حسب ذیل طریقہ سے معلوم کیا جاسکتا ہے ۔

(۱۶۵) فرض کرو کہ ہارٹ کے دائرہ کا نصف قطر غہ ہے اور مثلث کے حائط دائرہ کا نصف قطر ما ـ فرض کرو کہ مثلث کے اندرونی اور جانبی دائروں کے نصف قطر ر، ر_1، ر_2، ر_3 ہیں اور ان کے قطب $\bar{\text{آ}}$، $\bar{\text{آ}}_1$، $\bar{\text{آ}}_2$، $\bar{\text{آ}}_3$ ـ اب چونکہ دائرہ ھ ان چار دائروں کو مس کرتا ہے اس لئے

$$\text{ھ}\bar{\text{آ}} = \text{غہ} - \text{ر}،\quad \text{ھ}\bar{\text{آ}}_1 = \text{غہ} + \text{ر}_1،\quad \text{ھ}\bar{\text{آ}}_2 = \text{غہ} + \text{ر}_2،\quad \text{ھ}\bar{\text{آ}}_3 = \text{غہ} + \text{ر}_3$$



نیز اگر مثلثات $\bar{\text{آ}}_1\bar{\text{آ}}_2\bar{\text{آ}}_3$، $\bar{\text{آ}}\bar{\text{آ}}_2\bar{\text{آ}}_3$، $\bar{\text{آ}}\bar{\text{آ}}_3\bar{\text{آ}}_1$، $\bar{\text{آ}}\bar{\text{آ}}_1\bar{\text{آ}}_2$ کی جیوب $2\,\text{نہ}$، $2\,\text{نہ}_1$، $2\,\text{نہ}_2$، $2\,\text{نہ}_3$ ہوں تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{نہ}_1 : \text{نہ} = \text{جب}\ \text{ا}\bar{\text{آ}} : \text{جب}\ \text{ا}\bar{\text{آ}}_1$$

$$= \text{جب}\ \text{ر} : \text{جب}\ \text{ر}_1$$

پس $\text{نہ} : \text{نہ}_1 : \text{نہ}_2 : \text{نہ}_3 = \dfrac{1}{\text{جب}\ \text{ر}} : \dfrac{1}{\text{جب}\ \text{ر}_1} : \dfrac{1}{\text{جب}\ \text{ر}_2} : \dfrac{1}{\text{جب}\ \text{ر}_3}$

اب دفعہ ۱۶۵ کا مسئلہ استعمال کرنے سے

$$\text{نہ}\ \text{جم}\ \text{ھ}\bar{\text{آ}} = \text{نہ}_1\ \text{جم}\ \text{ھ}\bar{\text{آ}}_1 + \text{نہ}_2\ \text{جم}\ \text{ھ}\bar{\text{آ}}_2 + \text{نہ}_3\ \text{جم}\ \text{ھ}\bar{\text{آ}}_3$$

جو

جم(غہ - ر)/جب ر = جم(غہ + ر۱)/جب ر۱ + جم(غہ + ر۲)/جب ر۲ + جم(غہ + ر۳)/جب ر۳

کے مماثل ہے۔

اس طرح

۴ مس غہ = مم ر۱ + مم ر۲ + مم ر۳ - مم ر

= ۱/ن {جب(س - ا) + جب(س - ب) + جب(س - ج) - جب س} (دفعات ۱۱۹، ۱۲۰)

= ۲ مس ر' (دفعہ ۱۲۲)

اور اس لئے مس غہ = ½ مس ر'

ڈاکٹر سامن[۱] (Dr. Salmon) نے اس نتیجہ کو سب سے پہلے دیا تھا۔ دفعہ ہذا کا ثبوت وہ ہے جو ڈاکٹر کیسی[۲] (Dr. Casey) نے دیا ہے۔

(۱۴۶) **۲۰۷ ـ ہارٹ کے دائرہ کا نصف قطر معلوم کرنیکا دوسرا طریقہ ـ** غہ کی قیمت اور قوسوں ا ھ، ب ھ، ج ھ کے طولوں کو ایک دوسرے اور زیادہ ابتدائی طریقہ سے ایکساتھ معلوم کیا جا سکتا ہے۔

دفعہ ۱۴۵ کے مسئلہ کو پہلے نقاط آ۲، ا، آ۳، ھ پر اور پھر نقاط ا، آ، آ۱، ھ پر لگاؤ تو

جم(غہ + ر۳) جب ا آ۳ + جم(غہ + ر۲) جب ا آ۲
= جم ا ھ جب (ا آ۲ + ا آ۳)،

جم(غہ - ر) جب ا آ۱ - جم(غہ + ر۱) جب ا آ
= جم ا ھ جب (ا آ۱ - ا آ)

۱؎ کوارٹرلی جرنل آف میتھامیٹکس ۱۸۶۴ء جلد ششم، صفحہ ۷۲۔

۲؎ Spherical Trigonometry, p. 82

اِن میں حسب ذیل ابدالات عمل میں لاؤ :-

جب اآ۲ = جب ر۲ / جم ½ ا ، جب اآ۳ = جب ر۳ / جم ½ ا ،

جم اآ۲ = جم ر۲ جم (س - ج) ، جم اآ۳ = جم ر۳ جم (س - ب) ،

جب اآ۱ = جب ر۱ / جب ½ ا ، جب اآ = جب ر / جب ½ ا

جم اآ۱ = جم ر۱ جم س ، جم اآ = جم ر جم (س - ا)

پہلی مساوات کو جم غہ جب ر۲ جب ر۳ سے اور دوسری کو جم غہ جب ر۱ جب ر سے تقسیم کرو تو وہ ہو جاتی ہیں

هم ر۲ + هم ر۳ - ۲ مس غہ

= جم اھ / جم غہ {هم ر۲ جم (س - ج) + هم ر۳ جم (س - ب)} ،

اور

هم ر۱ - هم ر - ۲ مس غہ

= - جم اھ / جم غہ {هم ر جم (س - ا) - هم ر۱ جم س}

ان مساواتوں کی بائیں جانبوں میں هم ر ، هم ر۱ وغیرہ کی بجائے جب س / ن ، جب (س - ا) / ن وغیرہ درج کرنے سے یہ مساواتیں حسب ذیل سادہ تر شکلوں میں تحویل ہو جاتی ہیں :-

هم ر۲ + هم ر۳ - ۲ مس غہ = جم اھ جب ا / ن جم غہ ،

هم ر۱ - هم ر - ۲ مس غہ = - جم اھ جب ا / ن جم غہ ،

(۱۶۷) ان کو آسانی کے ساتھ صرف جمع اور تفریق کے اعمال سے حل

کیا جا سکتا ہے۔ چنانچہ عمل جمع سے حاصل ہوتا ہے

مس غہ = ۱/۴ (مم ر۱ + مم ر۲ + مم ر۳ − مم ر) = ۱/۲ مس ر

اور عمل تفریق سے،

جم اھ = ۱/۲ (ن جم غہ / جب ا) {مم ر۲ + مم ر۳ − مم ر۱ + مم ر}

= ۱/۲ (جم غہ / جب ا) {جب (س − ب) + جب (س − ج)

− جب (س − ا) + جب س}

= (جم ۱/۲ ب جم ۱/۲ ج / جم ۱/۲ ا) جم غہ

۲۰۸ — ھ کے عمادی محدد — اگر مثلث اب ج کے ضلعوں پر ھ سے عمود وار قوسیں کھینچی جائیں اور ان قوسوں کے طول لا، ما، ی ہوں تو جب لا، جب ما، اور جب ی کی قیمتیں آسانی سے معلوم ہو سکتی ہیں۔

کیونکہ وہ مثلث جس کے راس یہ ہیں

(۱) عمود لا کا پائین

(۲) ہارٹ کے دائرہ کا مرکز

(۳) ضلع ب ج کے ساتھ اس دائرہ کا ایک نقطہ تقاطع

ایک قائم الزاویہ مثلث ہے اور لا کے مقابل کا جو زاویہ ہے وہ ب − ج کے متمم کے مساوی ہے۔

پس　جب غہ جم (ب − ج) = جب لا　(دفعہ ۷۳)

جس سے جب لا معلوم ہوتا ہے کیونکہ غہ دفعہ ماسبق کی رو سے اب ایک معلومہ مقدار ہے۔

۲۰۹ — فرض کرو کہ مثلث کے ارتفاعوں کا مشترک نقطہ تقاطع

و ہے، اس کے خطوط وسطی کا مشترک نقطہ تقاطع گ، اور ہارٹ کے دائرہ کا مرکز ھ۔ ہم یہ بتائیں گے کہ و، ھ اور ل، ایک بڑے دائرہ پر واقع ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ مثلث کے ضلعوں پر و سے کھینچے ہوئے عمود لا$_1$، ما$_1$، ی$_1$ ہیں اور ھ سے کھینچے ہوئے عمود لا، ما، ی اور گ سے کھینچے ہوئے عمود لا$_2$، ما$_2$، ی$_2$ تو دفعات ۲۰۸ اور ۱۶۲ سے

جب لا / جم (ب - ج) = جب ما / جم (ج - ا) = جب ی / جم (ا - ب)،

جب لا$_1$ / جم ب جم ج = جب ما$_1$ / جم ج جم ا = جب ی$_1$ / جم ا جم ب،

جب لا$_2$ / جب ب جب ج = جب ما$_2$ / جب ج جب ا = جب ی$_2$ / جب ا جب ب،

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ (۱۶۸)

جب لا = ت$_1$ جب لا$_1$ + ت$_2$ جب لا$_2$،

جب ما = ت$_1$ جب ما$_1$ + ت$_2$ جب ما$_2$،

جب ی = ت$_1$ جب ی$_1$ + ت$_2$ جب ی$_2$،

جہاں ت$_1$ اور ت$_2$ ایسی مقداریں ہیں جن کی قیمتوں کا معلوم ہونا ہمارے مقصد کے لئے ضروری نہیں ہے۔

اس لئے دفعہ ۱۴۶ کی رو سے و اور گ جس بڑے دائرہ پر واقع ہوتے ہیں اسی بڑے دائرہ پر ایک نقطہ ہے ایسا جو کروی مثلث کے ضلعوں ا، ب، ج سے بالترتیب لا، ما، ی عمودی فاصلوں پر واقع ہے اور اس لئے یہ نقطہ نقطہ ھ ہونا چاہئے۔

۲۱۰ — ہارٹ کا دائرہ مثلث کے ضلعوں کو جن نقطوں پر

قطع کرتا ہے اِن کے مقامات کی تعیین کرنا۔

فرض کرو کہ ہارٹ کا دائرہ ضلع ا ب کو ایسے نقطوں پہ قطع کرتا ہے جن کے فاصلے ا سے علی الترتیب لہ اور مہ ہیں۔ تب دفعہ ۱۷۰ سے

$$\text{مس}\tfrac{1}{2}\text{لہ}\ \text{مس}\tfrac{1}{2}\text{مہ}=\frac{\text{جم غ}-\text{جم}(\text{ا ھ})}{\text{جم غ}+\text{جم}(\text{ا ھ})}=\frac{\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ا}-\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب}\ \text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج}}{\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ا}+\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب}\ \text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج}}$$

اسی طرح تشاکل سے ہمیں حاصل ہونا چاہیے

$$\text{مس}\tfrac{1}{2}(\text{ج}-\text{لہ})\ \text{مس}\tfrac{1}{2}(\text{ج}-\text{مہ})=\frac{\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب}-\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج}\ \text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ا}}{\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب}+\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج}\ \text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ا}}$$

پہلی مساوات میں مس ½ لہ مس ½ مہ کی جو قیمت دی گئی ہے اس کو دوسری مساوات میں مندرج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس}\tfrac{1}{2}\text{لہ}+\text{مس}\tfrac{1}{2}\text{مہ}=\frac{\text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{ا}-\text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{ب}\ \text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{ج}+\text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{ب}\ \text{جب}^2\tfrac{1}{2}\text{ج}}{\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب}\ \text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج}\left(\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ا}+\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب}\ \text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج}\right)}$$

$$=\frac{\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ا}-\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب}\ \text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج}}{\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب}\ \text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ج}}+\frac{\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب}\ \text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ج}}{\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ا}+\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب}\ \text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج}}$$

اس مساوات اور پہلی مساوات سے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ

$$\text{مس}\tfrac{1}{2}\text{لہ}=\frac{\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ا}-\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب}\ \text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج}}{\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب}\ \text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ج}}\ ،$$

$$\text{مس}\tfrac{1}{2}\text{مہ}=\frac{\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب}\ \text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ج}}{\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ا}+\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب}\ \text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج}}\ .$$

۲۱۱ — فرض کرو کہ لہ اور مہ سے جو نقطے متعین ہوتے ہیں وہ ع۳، و۳ ہیں، اور اسی طرح اضلاع ب ج اور ج ا پر کے متناظر نقطے ع۱، و۱، ع۲، و۲ ہیں تو اس امر کی فوراً تصدیق ہوتی ہے کہ قوسین ا ع۱، ب ع۲، ج ع۳ ایک مشترک نقطے میں سے (۱۶۹)

گذرتی ہیں جس کے عمادی محدد

قط $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + 2$ ا $-$ س$)$، قط $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + 2$ ب $-$ س$)$،

قط $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + 2$ ج $-$ س$)$

کے متناسب ہیں اور نقطے و، ب و، ج و، اس مشترک نقطہ میں سے گذرتی ہیں جس کے عمادی محدد

قم $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + 2$ ا $-$ س$)$،
قم $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + 2$ ب $-$ س$)$،
قم $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + 2$ ج $-$ س$)$

کے متناسب ہیں۔

لامتناہی نصف قطر کے کرہ پر کسی مثلث کی صورت میں یعنی مثلث مستوی کی صورت میں س $= \frac{1}{2}\pi$ اور ان دو نقطوں کے عمادی (یعنے سہ خطی) محدد علی الترتیب

قط ا، قط ب، قط ج

قم ا، قم ب، قم ج

کے متناسب ہیں۔ پہلا نقطہ اس مثلث مستوی کا مرکز عمودی ہے اور دوسرا نقطہ اس کا مرکز ثقل۔

پس جب کروی مثلث مستوی مثلث ہو جاتا ہے تو نقاط ع$_1$، ع$_2$، ع$_3$ مقابل کے راسوں سے عمودوں کے پائین ہو جاتے ہیں اور نقطے و$_1$، و$_2$، و$_3$ ضلعوں کے وسطی نقطے۔

یہ چھ نقطے فی الحقیقت نو نقطی دائرہ پر واقع ہوتے ہیں۔

نیز مثلث مستوی کی صورت میں ضابطہ مس غہ $= \frac{1}{2}$ مس ر ضابطہ غہ $= \frac{1}{2}$ ر میں تحویل ہو جاتا ہے جو نو نقطی دائرہ کی ایک مشہور خاصیت ہے۔ ان واقعات سے ہارٹ کے دائرہ اور نو نقطی دائرہ کے درمیان جو مشابہت ہے وہ اچھی طرح واضح ہو جاتی ہے۔

امثلہ نمبری (۱۳)

۱ ۔ ایک کروی مثلث کے زاویہ ج سے اس قوس پر عمود کھینچا گیا ہے جو اضلاع و اور ب کے نقاط وسطی کو ملاتی ہے۔ ثابت کرو کہ یہ عمود ضلع ا کے

ساتھ زاویہ س - ب اور ضلع ب کے ساتھ زاویہ س - ا بناتا ہے۔

۲ - ایک کروی مثلث کے ہر زاویہ سے اس قوس پر عمود کھینچا گیا ہے جو متصلہ اضلاع کے نقاط وسطی کو ملاتی ہے۔ ثابت کرو کہ یہ عمود ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ اگر اس نقطہ سے اضلاع ا، ب، ج پر علی الترتیب عمود لا، ما، ی کھینچے جائیں تو

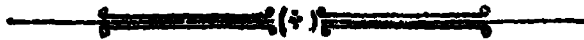
$$\frac{\text{جب لا}}{\text{جب}(س-ب)\,\text{جب}(س-ج)} = \frac{\text{جب ما}}{\text{جب}(س-ج)\,\text{جب}(س-ا)} \quad (۱۷۰)$$

$$= \frac{\text{جب ی}}{\text{جب}(س-ا)\,\text{جب}(س-ب)}$$

۳ - ایک کروی مثلث کے ہر زاویہ سے ایک ایسی قوس کھینچی گئی ہے جو ایک ضلع کے ساتھ وہی زاویہ بناتی ہے جو قاعدہ پر کا عمود دوسرے ضلع کے ساتھ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ قوسیں ایک نقطہ پر ملتی ہیں۔ اگر اس نقطہ سے اضلاع ا، ب، ج پر علی الترتیب عمود لا، ما، ی کھینچے جائیں تو

$$\frac{\text{جب لا}}{\text{جم ا}} = \frac{\text{جب ما}}{\text{جم ب}} = \frac{\text{جب ی}}{\text{جم ج}}$$

۴ - ثابت کرو کہ امثلہ ۲ اور ۳ میں جن نقطوں کی تعیین ہوئی ہے وہ اور ہارٹ کے دائرہ کا قطب ایک بڑے دائرہ پر واقع ہوتے ہیں۔ اس کے جواب میں ہندسہ مثنوی میں جو مسئلہ ہے اسکو بیان کرو۔



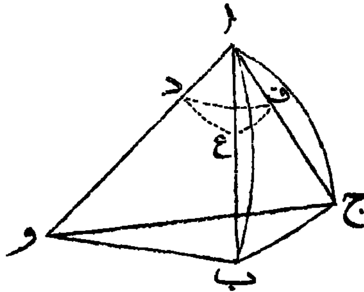
(۱۷۱)

بارہواں باب

بعض تقریبی ضابطوں کے بیان میں

۲۱۲ – اب ہم چند تقریبی ضابطوں کی تحقیق کرینگے جو اکثر کروی مثلثوں کو محسوب کرنے میں فائدہ مند ہیں جبکہ کرہ کا نصف قطر مثلثوں کے ضلعوں کے طولوں کے مقابلہ میں بڑا ہو۔

۲۱۳ – اگر کروی مثلث کے دو ضلع اور اِن کا درمیانی زاویہ دئے جائیں تو اِن اضلاع کے وتروں کا درمیانی زاویہ معلوم کرنا۔



فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کے دئے ہوئے دو ضلع ا ب، ا ج ہیں اور کرہ کا مرکز و ہے۔ ا کو مرکز مانکر ایک کرہ

کھینچو اور فرض کرو کہ یہ کرہ او' اب' اج کو علی الترتیب د' ع' ف پر ملتا ہے۔ تب مستویوں و اب' و اج کا درمیانی زاویہ ع د ف ہے اور اس لئے ا کے مساوی ہے۔
کروی مثلث د ع ف سے

$$\text{جم ع ف} = \text{جم د ع جم د ف} + \text{جب د ع جب د ف جم ا}$$

اور $\text{د ع} = \frac{1}{2}(\pi - \text{ج})$' $\text{د ف} = \frac{1}{2}(\pi - \text{ب})$ (۱۷۲)

اسلئے $\text{جم ع ف} = \text{جب } \frac{1}{2}\text{ب جب } \frac{1}{2}\text{ج} + \text{جم } \frac{1}{2}\text{ب جم } \frac{1}{2}\text{ج جم ا}$ ....(۱)

اگر مثلث کے اضلاع کرہ کے نصف قطر کے مقابلہ میں چھوٹے ہوں تو ع ف' ا سے زیادہ فرق نہ رکھیگا۔ فرض کرو کہ
ع ف = ا - ط' تو تقریبی طور پر

$$\text{جم ع ف} = \text{جم ا} + \text{ط جب ا}$$

اور $\text{جب } \frac{1}{2}\text{ب جب } \frac{1}{2}\text{ج} = \text{جب}^2 \frac{1}{4}(\text{ب}+\text{ج}) - \text{جب}^2 \frac{1}{4}(\text{ب}-\text{ج})$

$\text{جم } \frac{1}{2}\text{ب جم } \frac{1}{2}\text{ج} = \text{جم}^2 \frac{1}{4}(\text{ب}+\text{ج}) - \text{جب}^2 \frac{1}{4}(\text{ب}-\text{ج})$

اس لئے

$$\text{جم ا} + \text{ط جب ا} = \text{جب}^2 \frac{1}{4}(\text{ب}+\text{ج}) - \text{جب}^2 \frac{1}{4}(\text{ب}-\text{ج}) + \left\{1 - \text{جب}^2 \frac{1}{4}(\text{ب}+\text{ج}) - \text{جب}^2 \frac{1}{4}(\text{ب}-\text{ج})\right\}\text{جم ا}$$

اس لئے

$$\text{ط جب ا} = (1 - \text{جم ا})\,\text{جب}^2 \frac{1}{4}(\text{ب}+\text{ج}) - (1 + \text{جم ا})\,\text{جب}^2 \frac{1}{4}(\text{ب}-\text{ج})$$

اس لئے

$$\text{ط} = \text{مس } \frac{1}{2}\text{ا جب}^2 \frac{1}{4}(\text{ب}+\text{ج}) - \text{مم } \frac{1}{2}\text{ا جب}^2 \frac{1}{4}(\text{ب}-\text{ج})$$

(۲) ......

اس سے ط کا دائری ناپ معلوم ہوتا ہے۔ اس زاویہ میں ثانیوں کی جو تعداد ہے وہ اس دائری ناپ کو ایک ثانیہ کے دائری ناپ سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے یا اس کو ۲۰۶۲۶۵ سے ضرب دینے سے جو ایک نیم قطری

زاویہ میں ثانیوں کی تعداد ہے۔ اگر ا اور ب کے متناظر وتروں کے طول علی الترتیب عہ اور بہ ہوں اور کرہ کا نصف قطر ر تو ا اور ب کے دائری ناپ علی الترتیب عہ/ر اور بہ/ر ہیں اور وتری مثلث کے ضلعوں کے طول علی الترتیب ۲ ر جیب عہ/۲ر اور ۲ ر جیب بہ/۲ر۔

پس جب کروی مثلث کے ضلع اور کرہ کا نصف قطر معلوم ہوں تو ہم وتری مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کو محسوب کر سکتے ہیں۔

(۱۷۳) ۲۱۴۔ لیجنڈر کا مسئلہ[1]۔ اگر کروی مثلث کے ضلع بمقابلہ کرہ کے نصف قطر کے چھوٹے ہوں اور اگر ایک ایسا مثلث مستوی بنایا جائے جس کے ضلع طول میں کروی مثلث کے ضلعوں کے مساوی ہوں تو کروی مثلث کا ہر زاویہ مثلث مستوی کے متناظر زاویہ سے بقدر ایک ثلث کروی اضافہ کے بڑا ہوگا۔

فرض کرو کہ کروی مثلث کے زاویے ا، ب، ج ہیں اور ضلع ا، ب، ج، کرہ کا نصف قطر ر، اور ضلعوں کی قوسوں کے طول عہ، بہ، جہ۔ اسی لئے عہ/ر، بہ/ر، جہ/ر علی الترتیب ا، ب، ج کے دائری ناپ ہیں۔ تب

[1] لیجنڈر، Memoires de Paris ۱۷۸۷ء، صفحہ ۳۳۸۔ Trigonometrie ضمیمہ پنجم۔ مقابلہ کرو گاس کی Disquisitiones generales circa superficies curvas دفعات ۲۷، ۲۸ اور مرٹینس (Mertens) کی Schlomilch's Zeitschrift ۱۸۷۵ء کے ساتھ

$$\text{جم ا} = \frac{\text{جم ا} - \text{جم ب جم ج}}{\text{جب ب جب ج}}$$

اب

$$\text{جم ا} = ۱ - \frac{\text{عہ}^۲}{۲\,\text{ر}^۲} + \frac{\text{عہ}^۴}{۲۴\,\text{ر}^۴} - \ldots\ldots (۳)$$

$$\text{جب ا} = \frac{\text{عہ}}{\text{ر}} - \frac{\text{عہ}^۳}{۶\,\text{ر}^۳} + \ldots\ldots (۴)$$

ایسے ہی جملے جم ب اور جب ب کے لئے اور جم ج اور جب ج کے لئے ہیں۔ پس اگر ہم دائری ناپ کی چوتھی قوت سے اعلیٰ تر قوتوں کو نظر انداز کریں تو

$$\text{جم ا} = \frac{۱ - \frac{\text{عہ}^۲}{۲\,\text{ر}^۲} + \frac{\text{عہ}^۴}{۲۴\,\text{ر}^۴} - \left(۱ - \frac{\text{بہ}^۲}{۲\,\text{ر}^۲} + \frac{\text{بہ}^۴}{۲۴\,\text{ر}^۴}\right)\left(۱ - \frac{\text{جہ}^۲}{۲\,\text{ر}^۲} + \frac{\text{جہ}^۴}{۲۴\,\text{ر}^۴}\right)}{\frac{\text{بہ جہ}}{\text{ر}^۲}\left(۱ - \frac{\text{بہ}^۲}{۶\,\text{ر}^۲}\right)\left(۱ - \frac{\text{جہ}^۲}{۶\,\text{ر}^۲}\right)}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۲\,\text{ر}^۲}\left(\text{بہ}^۲ + \text{جہ}^۲ - \text{عہ}^۲\right) + \frac{۱}{۲۴\,\text{ر}^۴}\left(\text{عہ}^۴ - \text{بہ}^۴ - \text{جہ}^۴ - ۶\,\text{بہ}^۲\,\text{جہ}^۲\right)}{\frac{\text{بہ جہ}}{\text{ر}^۲}\left(۱ - \frac{\text{بہ}^۲ + \text{جہ}^۲}{۶\,\text{ر}^۲}\right)}$$

$$= \frac{۱}{۲\,\text{بہ جہ}}\left\{\text{بہ}^۲ + \text{جہ}^۲ - \text{عہ}^۲ + \frac{۱}{۱۲\,\text{ر}^۲}\left(\text{عہ}^۴ - \text{بہ}^۴ - \text{جہ}^۴ - ۶\,\text{بہ}^۲\,\text{جہ}^۲\right)\right\} \times \left\{۱ + \frac{\text{بہ}^۲ + \text{جہ}^۲}{۶\,\text{ر}^۲}\right\}$$

$$= \frac{\text{بہ}^۲ + \text{جہ}^۲ - \text{عہ}^۲}{۲\,\text{بہ جہ}} + \frac{\text{عہ}^۴ + \text{بہ}^۴ + \text{جہ}^۴ - ۲\,\text{بہ}^۲\,\text{جہ}^۲ - ۲\,\text{جہ}^۲\,\text{عہ}^۲ - ۲\,\text{عہ}^۲\,\text{بہ}^۲}{۲۴\,\text{بہ جہ ر}^۲} \ldots\ldots (۵)$$

(۱۷۴) اب فرض کرو کہ اَ، بَ، جَ اُس مثلث مستوی کے زاویے ہیں

جس کے ضلع علی الترتیب عہ، بہ، جہ ہیں، تب

$$\text{جم}\ \acute{\text{ا}} = \frac{\text{بہ}^2 + \text{جہ}^2 - \text{عہ}^2}{2\ \text{بہ}\ \text{جہ}}$$

اور $2\ \text{بہ}^2\ \text{جہ}^2 + 2\ \text{جہ}^2\ \text{عہ}^2 + 2\ \text{عہ}^2\ \text{بہ}^2 - \text{عہ}^4 - \text{بہ}^4 - \text{جہ}^4 = 4\ \text{بہ}^2\ \text{جہ}^2\ \text{جب}^2\ \acute{\text{ا}}$ ...... (۶)

اس طرح $\text{جم ا} = \text{جم}\ \acute{\text{ا}} - \frac{\text{بہ جہ جب}^2\ \acute{\text{ا}}}{6\ \text{ر}^2}$ .... (۷)

فرض کرو کہ $\text{ا} = \acute{\text{ا}} + \text{طہ}$ تو

$\text{جم ا} = \text{جم}\ \acute{\text{ا}} - \text{طہ جب}\ \acute{\text{ا}}$ تقریباً

اس لئے $\text{طہ} = \frac{\text{بہ جہ جب}\ \acute{\text{ا}}}{6\ \text{ر}^2} = \frac{\acute{\text{س}}}{3\ \text{ر}^2}$ .... (۸)

جہاں $\acute{\text{س}}$ سے اُس مثلث مستوی کا رقبہ تعبیر ہوتا ہے جبکہ ضلع عہ، بہ، جہ ہیں۔ اسی طرح

$\text{ب} = \acute{\text{ب}} + \frac{\acute{\text{س}}}{3\ \text{ر}^2}$ اور $\text{ج} = \acute{\text{ج}} + \frac{\acute{\text{س}}}{3\ \text{ر}^2}$

اس لئے تقریبی طور پر

$$\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = \acute{\text{ا}} + \acute{\text{ب}} + \acute{\text{ج}} + \frac{\acute{\text{س}}}{\text{ر}^2}$$

$$= \pi + \frac{\acute{\text{س}}}{\text{ر}^2}$$

اس لئے $\frac{\acute{\text{س}}}{\text{ر}^2}$، کروی مثلث کے کروی اضافہ ع کے تقریباً مساوی ہے اور اس لئے یہ ثابت ہوگیا کہ

$$\text{ا} = \acute{\text{ا}} + \tfrac{1}{3}\ \text{ع}،\ \text{ب} = \acute{\text{ب}} + \tfrac{1}{3}\ \text{ع}،$$
$$\text{ج} = \acute{\text{ج}} + \tfrac{1}{3}\ \text{ع}$$

۲۱۵ — اگر کروی مثلث کا رقبہ س سے تعبیر ہو تو کروی اضافہ

ٹھیک سَ/۳ر۲ کے مساوی ہوتا ہے۔ پس سَ اور سَ تقرب کے اس درجہ تک جو اوپر استعمال ہوا ایک دوسرے کے مساوی ہیں اس لئے کروی مثلث کا رقبہ اور اُس مثلث مستوی کا رقبہ جسکے ضلع اسی طول کے ہوں ایک دوسرے سے صرف بقدر اُس چھوٹی مقدار کے فرق رکھتے ہیں جس کا رتبہ اُس نسبت کے رتبہ کے مساوی ہے جو اِن میں سے کسی ایک رقبہ کو کرہ کے پورے رقبہ سے ہے۔

۲۱۶ – **مثلثوں کا تقریبی حل** – کروی مثلثوں کو تقریبی طور پر (۱۷۵ حل کرنے میں لیجنڈر کا مسئلہ طریقۂ ذیل پر استعمال کیا جا سکتا ہے۔

(۱) فرض کرو کہ کروی مثلث کے تینوں ضلع معلوم ہیں

اس صورت میں عہ، بہ، جہ کی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں اور علم مثلث مستوی کے ضابطوں سے ہم سَ اور اَ، بَ، جَ کی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں – پھر ا، ب، ج ضوابط ذیل سے معلوم ہو سکتے ہیں۔

ا = اَ + سَ/۳ر۲ ، ب = بَ + سَ/۳ر۲ ، ج = جَ + سَ/۳ر۲

(9)........

(۲) فرض کرو کہ کروی مثلث کے دو ضلع اور اِن کا درمیانی زاویہ معلوم ہیں، مثلاً ا، ب، ج – اس صورت میں

سَ = ½ بہ جہ جب اَ = ½ بہ جہ جب ا تقریباً

اب اَ ضابطہ اَ = ا – سَ/۳ر۲ سے معلوم ہوتا ہے۔ اس لئے مثلث مستوی کے دو ضلع اور اِنکا درمیانی زاویہ معلوم ہوتے ہیں۔ اس لئے اس کے باقی عناصر محسوب ہو سکتے ہیں اور پھر کروی

مثلث کے عناصر کی تقریبی قیمتیں معلوم ہو سکتی ہیں۔

(۳) فرض کرو کہ کروی مثلث کے دو ضلع اور ان میں سے ایک ضلع کے مقابل کا زاویہ معلوم ہیں، مثلاً ا، ء، ب۔ اس صورت میں

$$\text{س}' = \tfrac{1}{2}\,\text{عہ بہ جب ج}' = \tfrac{1}{2}\,\text{عہ بہ جب}\,(\text{ا}' + \text{ب}')$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{عہ بہ جب}\,(\text{ا} + \text{ب}') \quad \text{تقریباً}$$

$$\text{اور اس لئے}\quad \text{ع} = \frac{\text{عہ بہ}}{2}\,\text{جب}\,(\text{ا} + \text{ب}') \qquad \ldots\ldots (۱۱)$$

زاویہ ب' نہیں دیا گیا ہے لیکن ع کے مندرجہ بالا جملہ میں درج کرنے کے لئے اس کی قیمتیں ربط

$$\text{جب ب}' = \frac{\text{بہ}}{\text{عہ}}\,\text{جب ا}' = \frac{\text{بہ}}{\text{عہ}}\,\text{جب ا}$$

سے تقرب کے کافی رتبہ تک حاصل ہوتی ہیں۔ جب ع اس طرح معلوم ہو جاتا ہے تو ا' ضابطہ $\text{ا} = \text{ا}' + \tfrac{1}{3}\,\text{ع}$ سے حاصل ہوتا ہے اور کروی مثلث کے حل کا مسئلہ ایسے مثلث مستوی کے حل پر منحصر ہو جاتا ہے جس کے عناصر عہ، بہ اور ا' معلوم ہیں۔

(۴) فرض کرو کہ کروی مثلث کے دو زاویے اور انکا (۱۰۶)
مشترک ضلع معلوم ہیں، مثلاً ا، ب، ج۔ تب

$$\text{س}' = \frac{\text{ج}^2\,\text{جب ا}'\,\text{جب ب}'}{2\,\text{جب}\,(\text{ا}' + \text{ب}')} = \frac{\text{ج}^2\,\text{جب ا جب ب}}{2\,\text{جب}\,(\text{ا} + \text{ب})}\ \text{تقریباً} \ldots (۱۲)$$

اس سے ع کی قیمت ملتی ہے اور اس لئے ہم ا اور ب کی قیمتوں سے ا' اور ب' کی قیمتیں اخذ کر سکتے ہیں۔ پس مثلث مستوی کے دو زاویے اور ان کا مشترک ضلع معلوم ہو جاتے ہیں۔

(۵) فرض کرو کہ کروی مثلث کے دو زاویے اور ان میں سے

ایک کے مقابل کا ضلع معلوم ہیں، مثلاً ا، ب، ا تو

ج = ۲ - ا - ب = ۲ - ا - ب تقریباً

اور س = عہ جب ب جب ج / ۲ جب ا

= ½ عہ جب ب جب (ا + ب) قم ا تقریباً . . . (۱۳)

اس لئے ع حاصل ہو جاتا ہے اور حسب معمول ا اور ب کی قیمتوں سے ا اور ب کی تقریبی قیمتیں معلوم ہوتی ہیں۔ اب صرف ایسے مثلث مستوی کا حل کرنا رہ جاتا ہے جس کے عناصر ا، ب اور عہ معلوم ہیں۔ یہ صورت ابہام سے پاک ہے کیونکہ ہم صرف ایسے مثلثوں کو حل کر رہے ہیں جن کے اضلاع بمقابلہ ر کے چھوٹے ہیں۔

۲۱۷ — علم مثلث کروی میں لیجنڈر کے مسئلہ کو زمین کی سطح کی پیمائش میں جو اہمیت حاصل ہے اس کی وجہ سے اس مسئلہ کی کافی تحقیق و ترقی عمل میں آچکی ہے جس سے ہم یہ امتحان کر سکتے ہیں کہ تقریب کس درجہ تک صحیح ہے۔ ہم ان میں سے بعض تحقیقوں پر غور کرینگے۔ ہم نے یہ دیکھا ہے کہ کروی اضافہ تقریباً س / ر² کے مساوی ہے اور اب ہم کروی اضافہ کے لئے اس سے زیادہ قریب تر تقریبی ضابطہ کی تلاش کرینگے۔

۲۱۸ — کروی اضافہ کی تقریبی قیمت معلوم کرنا[1]

لولیر (L'Huilier) کے مسئلہ سے، دفعہ ۱۳۴

---

[1] گاس، Disquisitiones, etc. دفعہ ۲۹

$$مس\ \tfrac{1}{4}\ ع = \left[مس\ \tfrac{1}{2}\ س\ مس\ \tfrac{1}{2}\ (س - ا)\ مس\ \tfrac{1}{2}\ (س - ب)\ مس\ \tfrac{1}{2}\ (س - ج)\right]^{\frac{1}{2}} \quad ......\ (۱۴)$$

(۱۷۷) اور اسلئے تقریباً

$$= \left[\tfrac{1}{16}\ س\left\{1+\frac{س^2}{12}\right\}(س-ا)\left\{1+\frac{(س-ا)^2}{12}\right\}(س-ب)\left\{1+\frac{(س-ب)^2}{12}\right\}(س-ج)\left\{1+\frac{(س-ج)^2}{12}\right\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{4}\left[س\ (س-ا)(س-ب)(س-ج)\right]^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{س^2+(س-ا)^2+(س-ب)^2+(س-ج)^2}{12}\right]^{\frac{1}{2}} \quad ......\ (۱۵)$$

$$= \frac{ش}{4 ر^2}\left\{1+\frac{ا^2+ب^2+ج^2}{24}\right\}$$

اس لئے

$$ع = \frac{ش}{ر^2}\left(1+\frac{عہ^2+بہ^2+جہ^2}{24\ ر^2}\right) \quad ......\ (۱۶)$$

پس، تقریب کے اس رتبہ تک، کروی مثلث کا رقبہ مثلث مستوی کے رقبہ سے بقدر

$$\frac{عہ^2+بہ^2+جہ^2}{24\ ر^2} \times \text{مثلث مستوی کا رقبہ}$$

کے بڑا ہوتا ہے۔

ایک اور جملہ دفعہ ۱۳۲ کے ضابطہ (۵) سے اخذ کیا گیا ہے اور یہ بعض اوقات استعمال کیا جاتا ہے۔ یہ ضابطہ ہے

$$جب\ \tfrac{1}{2}\ ع = جب\ ج\ جب\ \tfrac{1}{2}\ ا\ جب\ \tfrac{1}{2}\ ب\ قط\ \tfrac{1}{2}\ ج \quad .....\ (۱۷)$$

کیونکہ اس سے، تقریبی طور پر

$$جب\ \tfrac{1}{2}\ ع = جب\ ج\ \frac{عہ\ بہ}{4\ ر^2}\left(1-\frac{عہ^2}{24\ ر^2}\right)\left(1-\frac{بہ^2}{24\ ر^2}\right)\left(1-\frac{جہ^2}{24\ ر^2}\right)^{-1}$$

اور اس لئے

$$ع = جب ج \frac{ع ب}{ر^۲} \left(۱ + \frac{۳ جب^۲ - ع^۲ - ب^۲}{۲۴ ر^۲}\right) \ldots\ldots (۱۸)$$

یہ ظاہر ہے کہ ضابطہ (۱۸) میں جب ج کی بجائے جب ج + ½ ع جم ج مندرج کرنے سے ضابطہ (۱۶) اخذ ہو سکتا ہے۔

۲۱۹ - ا کی قیمت کا قریب تر تقریب معلوم کرنا[1]

چونکہ جب ½ ا جم ½ اَ = $\sqrt{\frac{جب(س - ب) جب(س - ج)}{جب ب جب ج} \times \frac{س(س - ا)}{ب ج}}$

اور جم ½ ا جب ½ اَ = $\sqrt{\frac{جب س جب(س - ا)}{جب ب جب ج} \times \frac{(س - ب)(س - ج)}{ب ج}}$

اس لئے جب ½ (ا - اَ) (۱۷۸)

$$= \frac{بَ}{ر^۲ ب ج} \times \frac{\left\{\frac{جب(س-ب)}{س-ب} \times \frac{جب(س-ج)}{س-ج}\right\}^{\frac{1}{2}} - \left\{\frac{جب س}{س} \times \frac{جب(س-ا)}{س-ا}\right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{\frac{جب ب}{ب} \times \frac{جب ج}{ج}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

(۱۹) ....

اگر ہم جیبی جملوں کے جذر المربعوں کی بجائے وہ جملے درج کریں جو تقریبی ضابطہ

$$جب^{\frac{1}{2}} ط / ر = ط^{\frac{1}{2}} \left(۱ - \frac{۱}{۱۲} ط^۲ + \frac{۱}{۱۴۴۰} ط^۴\right) \ldots\ldots (۲۰)$$

سے حاصل ہوتے ہیں اور یہ دیکھیں کہ

[1] گاس Disquisitiones. etc. دفعہ ۲۷ کلارک کی Geodesy صفحہ ۲۰۴۔

$$س^2 + (س - ا)^2 - (س - ب)^2 - (س - ج)^2 = ۲ ب ج \quad ....(۲۱)$$

$$س^4 + (س - ا)^4 - (س - ب)^4 - (س - ج)^4 = ب ج (۳ ا^2 + ب^2 + ج^2) \quad ....(۲۲)$$

$$(س - ب)^2 (س - ج)^2 - س^2 (س - ا)^2 = \frac{1}{4} ب ج (ا^2 - ب^2 - ج^2) \quad ....(۲۳)$$

توہمیں فوراً حاصل ہوگا

$$ا - اَ = \frac{1}{3} \times \frac{سَ}{ر^2}\left(1 + \frac{عہ^2 + 7 بہ^2 + 7 جہ^2}{120 ر^2}\right) \quad ....(۲۴)$$

اب اگر سَ کی بجائے اس کی قیمت ع کی رقوم میں رکھی جائے جو دفعہ ماسبق کے نتیجہ (۱۶) سے حاصل ہوتی ہے تو بالآخر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ا = اَ + \frac{1}{3} ع + \frac{1}{180} \frac{ع}{ر^2}(-2 عہ^2 + بہ^2 + جہ^2) \quad ....(۲۵)$$

۲۲۰ - $\frac{جب ا}{جب ب}$ کی تقریبی قیمت معلوم کرنا۔

چونکہ $\frac{جب ا}{جب ب} = \frac{جب ا}{جب ب}$

پس تقریبی طور پر

$$\frac{جب ا}{جب ب} = \frac{عہ\left(1 - \frac{عہ^2}{6 ر^2} + \frac{عہ^4}{120 ر^4}\right)}{بہ\left(1 - \frac{بہ^2}{6 ر^2} + \frac{بہ^4}{120 ر^4}\right)}$$

$$= \frac{عہ}{بہ}\left(1 - \frac{عہ^2}{6 ر^2} + \frac{عہ^4}{120 ر^4} + \frac{بہ^2}{6 ر^2} - \frac{عہ^2 بہ^2}{36 ر^4} - \frac{بہ^4}{120 ر^4} + \frac{بہ^4}{36 ر^4}\right)$$

$$= \frac{عہ}{بہ}\left\{1 + \frac{بہ^2 - عہ^2}{6 ر^2}\left(1 + \frac{7 بہ^2 - 3 عہ^2}{60 ر^2}\right)\right\} \quad ....(۲۶)$$

۲۲۱ — مم ب - مم ا کی تقریبی قیمت معلوم کرنا۔ (۱۷۹)

چونکہ $\text{مم ب} - \text{مم ا} = \frac{1}{\text{جب ب}}\left(\text{جم ب} - \frac{\text{جب ب}}{\text{جب ا}}\,\text{جم ا}\right)$

پس، دفعہ ۲۲۰ سے تقریبی طور پر

$$\text{مم ب} - \text{مم ا} = \frac{1}{\text{جب ب}}\left(\text{جم ب} - \frac{\text{به}}{\text{عه}}\,\text{جم ا} \;\; \frac{\text{به}}{\text{عه}}\cdot\frac{\text{عه}^2 - \text{به}^2}{6\,\text{ر}^2}\,\text{جم ا}\right)$$

اب ہم دفعہ ۲۱۴ میں یہ دکھا چکے ہیں کہ

$$\text{جم ا} = \frac{\text{به}^2 + \text{جه}^2 - \text{عه}^2}{2\,\text{به جه}} + \frac{\text{عه}^4 + \text{به}^4 + \text{جه}^4 - 2\,\text{به}^2\text{جه}^2 - 2\,\text{جه}^2\text{عه}^2 - 2\,\text{عه}^2\text{به}^2}{24\,\text{به جه ر}^2} \;\; \text{تقریباً}$$

اور جم ب اسی نمونہ کے ایک جملہ کے مساوی ہے،

اس لئے $\text{جم ب} - \frac{\text{به}}{\text{عه}}\,\text{جم ا} = \frac{\text{عه}^2 - \text{به}^2}{\text{عه جه}}$ تقریباً

اس طرح $\text{مم ب} - \text{مم ا} = \frac{\text{عه}^2 - \text{به}^2}{\text{عه جه جب ب}} - \frac{\text{عه}^2 - \text{به}^2}{\text{عه جه جب ب}} \times \frac{\text{به}^2 + \text{جه}^4 - \text{عه}^4}{12\,\text{ر}^2}$

$$= \frac{\text{عه}^2 - \text{به}^2}{\text{عه جه جب ب}}\left(1 - \frac{\text{به}^2 + \text{جه}^2 - \text{عه}^2}{12\,\text{ر}^2}\right) \quad \ldots (۲۷)$$

۲۲۲ — لیجنڈر کا مسئلہ کثرت سے علم تقسیم الارض میں استعمال ہوتا ہے جہاں اس سے مثلثوں کے حل میں بڑی آسانی پیدا ہوتی ہے تاہم یہ دیکھ لینا مناسب معلوم ہوتا ہے کہ اس کا استعمال کس حد تک محفوظ قرار دیا جا سکتا ہے۔

لیجنڈر کے مسئلہ سے ایک کروی مثلث کے ضلع کا طول محسوب کرنے میں جو خطا واقع ہوتی ہے اسکی تقریبی قیمت معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ ضلع بہ معلوم ہے اور ضلع عہ معلوم کرنا ہے۔ اگر کرُوی مثلث کا کرُوی اضافہ ع ہو تو لیجنڈر کے مسئلہ سے

$$\text{عہ} = \text{بہ} \frac{\text{جب}(\text{ا} - \frac{1}{3}\text{ع})}{\text{جب}(\text{ب} - \frac{1}{3}\text{ع})}$$

فرض کرو کہ اس طریقہ سے حساب لگانے میں ضلع کے طول میں صفا عہ کی خطا واقع ہوئی ہے۔ اس کی قیمت ع کی حقیقتاً اختیار کردہ قیمت پر منحصر ہوگی جس کو ایک سے زیادہ طریقوں سے محسوب کیا جا سکتا ہے۔ اس لئے خطا کے لئے جو جملہ نیچے درج ہے اس کو ع کی قیمت مندرج کرنے سے پیشتر حق الاستان مختصر کیا جا سکے گا۔

(۱۸۰) $$\text{صفا عہ} = \text{بہ} \frac{\text{جب}(\text{ا} - \frac{1}{3}\text{ع})}{\text{جب}(\text{ب} - \frac{1}{3}\text{ع})} - \text{عہ} \quad \cdots\cdots \quad (۲۸)$$

اب تقریبی طور پر

$$\frac{\text{جب}(\text{ا} - \frac{1}{3}\text{ع})}{\text{جب}(\text{ب} - \frac{1}{3}\text{ع})} = \frac{\text{جب ا} - \frac{1}{3}\text{ع جم ا} - \frac{1}{18}\text{ع}^2\text{جب ا}}{\text{جب ب} - \frac{1}{3}\text{ع جم ب} - \frac{1}{18}\text{ع}^2\text{جب ب}}$$

$$= \frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}}(1 - \frac{1}{3}\text{ع مم ا} - \frac{1}{18}\text{ع}^2)(1 - \frac{1}{3}\text{ع مم ب} - \frac{1}{18}\text{ع}^2)^{-1}$$

$$= \frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}}\left\{1 + \frac{1}{3}\text{ع}(\text{مم ب} - \text{مم ا}) + \frac{1}{9}\text{ع}^2\text{مم ب}(\text{مم ب} - \text{مم ا})\right\}$$

$$= \frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}} + \frac{1}{3}\text{ع}\frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}}(\text{مم ب} - \text{مم ا})(1 + \frac{1}{3}\text{ع مم ب})$$

$$\cdots\cdots (۲۹)$$

نیز ضوابط ذیل درست ہیں جہاں تک کہ ر^2 کی ارقام کا تعلق ہے:

$$\frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{عہ}}{\text{بہ}}\left(1 + \frac{\text{بہ}^2 - \text{عہ}^2}{6\,\text{ر}^2}\right) \cdots\cdots (۳۰)$$

$$\text{مم ب} - \text{مم ا} = \frac{\text{عہ}^2 - \text{بہ}^2}{\text{عہ جہ جب ب}}\left(1 - \frac{\text{بہ}^2 + \text{جہ}^2 - \text{عہ}^2}{12\,\text{ر}^2}\right) \cdots\cdots (۳۱)$$

اِن کو اُس رقم میں مندرج کیا جا سکتا ہے جس میں ع پہلے رتبہ کا ہے۔ اور ع کا پہلا تقریب یعنی $\frac{1}{\text{۲}}\,\frac{\text{عہ جہ}}{\text{ر}^{2}}$ جب ب، ع^{2} کے رتبہ کی ارقام میں درج کرنے کے لئے کافی ہے۔ اگر ب قریباً ۹۰° یا جہ چھوٹی نہیں ہے ہمیں $\frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}}$ کی دوسری تقریب مندرج کرنی چاہئے جو دفعہ ۲۲۰ میں حاصل ہوئی ہے۔

اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جب}(\text{ا}-\frac{1}{3}\text{ع})}{\text{جب}(\text{ب}-\frac{1}{3}\text{ع})}=\frac{\text{عہ}}{\text{بہ}}\left\{1+\frac{\text{بہ}^{2}-\text{عہ}^{2}}{6\,\text{ر}^{2}}\left(1+\frac{7\,\text{بہ}^{2}-3\,\text{عہ}^{2}}{60\,\text{ر}^{2}}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{3}\,\text{ع}\,\frac{\text{عہ}}{\text{بہ}}\left(1+\frac{\text{بہ}^{2}-\text{عہ}^{2}}{6\,\text{ر}^{2}}\right)\frac{\text{عہ}^{2}-\text{بہ}^{2}}{\text{عہ جہ جب ب}}\left(1-\frac{\text{بہ}^{2}+\text{جہ}^{2}-\text{عہ}^{2}}{12\,\text{ر}^{2}}\right)$$

$$+\frac{1}{36}\,\frac{\text{عہ}^{2}\,\text{جہ}^{2}\,\text{جب}^{2}\text{ب}}{\text{ر}^{4}}\;\frac{\text{عہ}^{2}-\text{بہ}^{2}}{\text{بہ جہ جب ب}}\;\text{مم ب}\quad\ldots\ldots(\text{۳۲})$$

(۱۸۱) بہ سے ضرب دینے، عہ تفریق کرنے اور پھر ع^{2} کے رتبہ کی ارقام میں ع کا پہلا تقریب داخل کرنے سے ہمیں معمولی عملِ اختصار کے بعد حاصل ہوتا ہے

$$\text{مف عہ}=\frac{\text{عہ}(\text{بہ}^{2}-\text{عہ}^{2})}{6}\left[-\frac{2\,\text{ع}}{\text{عہ جہ جب ب}}+\frac{1}{\text{ر}^{2}}+\frac{7\,\text{بہ}^{2}-3\,\text{عہ}^{2}}{60\,\text{ر}^{4}}\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots(\text{۳۳})$$

۲۲۳۔ اسلئے اگر ہم ع کو ضابطہ

$$\text{ع}=\frac{\text{عہ جہ جب ب}}{2\,\text{ر}^{2}}$$

سے محسوب کریں تو خطا ہے

$$\text{مف عہ}=\frac{\text{عہ}(\text{بہ}^{2}-\text{عہ}^{2})(7\,\text{بہ}^{2}-3\,\text{عہ}^{2})}{360\,\text{ر}^{4}}\quad\ldots\ldots(\text{۳۴})$$

لیکن اگر ہم ع کو اس مساوات سے محسوب کریں جو دفعہ ۲۱۸ کے ضابطہ (۱۸) کے جواب میں ہے تو

$$ع = \frac{عہ جہ جا ب}{۲ ر^۲} \left(۱ + \frac{۳ بہ^۲ - عہ^۲ - جہ^۲}{۲۴ ر^۲}\right) \ldots\ldots (۳۵)$$

اور اس لئے عہ میں خطا ہے

$$\therefore عہ = \frac{عہ (بہ^۲ - عہ^۲)(۵ جہ^۲ - عہ^۲ - بہ^۲)}{۲۰ \times ر^۴} \ldots\ldots (۳۶)$$

دونوں صورتوں میں جہ کے محسوب کرنے میں جو خطائیں ہونگی وہ اسی نمونہ کے جملوں سے تعبیر ہونگی۔

۲۲۴۔ ایک عددی مثال لو[1]۔ فرض کرو کہ زمین کی سطح پر ایک مثلث کے ضلع ہیں عہ = ۲۲۰.۰ میل، بہ = ۲۰۰.۰ میل، جہ = ۱۸۰.۰ میل۔ اگر ہم کروی اضافہ کو محسوب کرنے کا پہلا طریقہ استعمال کریں تو عہ اور جہ کی خطائیں ہیں

مف عہ = + ۰.۰۶۸، مف جہ = + ۰.۰۲۶، فٹوں میں

اگر ہم دوسرا طریقہ استعمال کریں تو خطائیں ہیں

مف عہ = - ۰.۰۳۱، مف جہ = - ۰.۰۳۰، فٹوں میں

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ لیجنڈر کا مسئلہ استعمال کرنے سے جو خطائیں واقع ہوئی ہیں وہ بہت ہی خفیف ہیں۔

۲۲۵۔ مثلث کا تقریبی حل جبکہ اسکا ایک ضلع چھوٹا ہو

جب مثلث کا صرف ایک ضلع بمقابلہ کرہ کے نصف قطر کے چھوٹا ہو تو تقربات ذیل کار آمد ثابت ہونگے۔ یہ تقربات کلارک کی تصنیف جیوڈیسی سے لئے گئے ہیں۔

مثلث کا تقریبی حل دریافت کرنا جبکہ زاویہ ج قائمہ ہو

[1] دیکھو کلارک کی جیوڈیسی صفحہ ۴۹۔

اور ا اور ب دئے جائیں اور ب بہت چھوٹا ہو۔

اگر ا کا متمم و سے تعبیر ہو تو موجودہ مثال میں ہم دیکھتے ہیں کہ و اور ب بہت چھوٹے ہیں۔

اب
$$\frac{\text{مس}\,\bar{\text{ب}}}{\text{مس}\,\text{ب}} = \frac{1}{\text{جب}\,\text{ا}}$$

اور اگر ہم اختصار کی خاطر مساوات کی بائیں جانب کو ک سے تعبیر کریں اور مماسوں کو سلسلوں میں پھیلائیں تو

$$\bar{\text{ب}} + \frac{1}{3}\bar{\text{ب}}^{3} + \frac{2}{15}\bar{\text{ب}}^{5} + \ldots = \text{ک}\left(\text{ب} + \frac{1}{3}\text{ب}^{3} + \frac{2}{15}\text{ب}^{5} + \ldots\right) \quad \ldots\ldots (۳۷)$$

جس سے یہ نتیجہ اخذ ہو سکتا ہے کہ

$$\frac{\bar{\text{ب}}}{\text{ب}} = \text{ک}\left\{1 + \frac{1}{3}\text{ب}^{2}(1-\text{ک}^{2}) + \frac{1}{15}\text{ب}^{4}(1-\text{ک}^{2})(2-3\text{ک}^{2}) + \ldots\right\} \quad \ldots\ldots (۳۸)$$

اب ک کی قیمت درج کرنے سے اور ضابطہ

$$\text{جب}(\text{ا} + \text{لا}) = \text{جب}\,\text{ا}\,(1 + \text{لا}\ \text{مم}\,\text{ا})$$

کو ذہن میں رکھنے سے، جبکہ لا کے مربع کو نظر انداز کیا جائے، ہمیں حاصل ہوگا

$$\bar{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جب}\left(\text{ا} + \frac{1}{3}\text{ب}^{2}\,\text{مم}\,\text{ا}\right)}, \quad \ldots\ldots (۳۹)$$

یہاں تقرب میں جن رقموں کو نظر انداز کیا گیا ہے ان کا رتبہ ب^{5} ہے۔

نیز　$\text{جب}\,\text{و} = \text{جب}\,\text{ب}\,\text{جم}\,\text{ا}$

اس لئے
$$\text{و} = \text{ب}\,\text{جم}\,\text{ا}\left(1 - \frac{1}{6}\text{ب}^{2} - \ldots\right), \quad \ldots (۴۰)$$

جو، ب^{5} کی رقموں کو نظر انداز کر دینے سے، شکل

$$\text{و} = \text{ب}\,\text{جم}\left(\text{ا} + \frac{1}{6}\text{ب}^{2}\,\text{مم}\,\text{ا}\right) \quad \ldots (۴۱)$$

میں رکھا جا سکتا ہے۔

نیز اگر ج بقدر ایک چھوٹی مقدار لا کے ا سے بڑا ہو تو

جم (ا + لا) = جم ا جم ب

اس لئے لا = $\frac{1}{2}$ ب^{2} ہم ا − $\frac{1}{24}$ ب^{4} (۱ + ۳ ہم^{2} ا) ہم ا ، ..... (۴۲)

پس، یہ فرض کرکے کہ ہم ب کی چوتھی قوت نظر انداز کرسکتے ہیں، مثلث کا حل ہے

ج − ا = $\frac{1}{2}$ ب^{2} ہم ا = عا ، (۱۸۳)

د = $\frac{\text{ب}}{\text{جب} (\text{ا} + \frac{2}{3} \text{عا})}$ ، .... (۴۳)

۹۰ − ا = ب جم (ا + $\frac{1}{3}$ عا) ،

۲۲۶ — غیر قائم الزاویہ مثلث کا تقریبی حل دریافت کرنا جبکہ ا، ب، اور ج دیئے جائیں اور ب بہت چھوٹا ہو۔

اس عام تر صورت میں جس میں ب چھوٹا ہو اور ج قائمہ نہ ہو، ہم ج − ا معلوم کرنے کے لئے وہ سلسلے استعمال کرسکتے ہیں جو اوپر استعمال ہوئے ہیں۔

کیونکہ $\frac{\text{مس} \frac{1}{2} (\text{ج} - \text{ا})}{\text{مس} \frac{1}{2} \text{ب}} = \frac{\text{جب} \frac{1}{2} (\text{ج} - \text{ا})}{\text{جب} \frac{1}{2} (\text{ج} + \text{ا})}$

اور اگر ہم بائیں طرف کے رکن کو ک سے تعبیر کریں تو اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے۔

$\frac{\text{ج} - \text{ا}}{\text{ب}}$ = ک {۱ + $\frac{1}{12}$ ب^{2} (۱ − ک^{2}) + $\frac{1}{240}$ ب^{4} (۱ − ک^{2})(۲ − ۳ک^{2}) ....}

.... (۴۴)

اگر اس ضابطہ سے ج - ا کا حساب لگایا جائے تو چونکہ ب چھوٹا اور ک عدداً اکائی سے کم ہے اس لئے ب^۵ کی ارقام کو نظر انداز کرنے سے جو خطا ہوگی وہ بہت چھوٹی ہوگی کیونکہ بڑی سے بڑی قیمت جو ک (۱-ک^۲)(۲-۳ک^۲) اختیار کرسکتا ہے وہ ۰،۱۵۱ ہے اس لئے اگر ب، ۱° کے اتنا بڑا بھی ہو تو ب^۵ کی رقم زیادہ سے زیادہ ۰۰۰۰۰۲۲، قیمت اختیار کرسکتی ہے، اس لئے اس کو تمام صورتوں میں نظر انداز کیا جاسکتا ہے اور اس لئے

$$ج - ا = ب \frac{جب \frac{1}{2}(ج - ا)}{جب \frac{1}{2}(ج + ا)} \left\{ ۱ + \frac{ب^2}{۱۲} \times \frac{جب ج جب ا}{جب^2 \frac{1}{2}(ج + ا)} \right\} \quad \text{(۴۵)}$$

مسٹرل - جے - آئی - اے براموج نے اس مثلث کے لئے جس میں ب اسقدر چھوٹا ہو کہ ب^۳ نظر انداز ہوسکتا ہے حسب ذیل نتائج اخذ کئے ہیں:-

$$\left. \begin{aligned} & ج - ا = ب جم ا - \tfrac{1}{2} ب^2 ہم ج جب^2 ا \\ & ب جب ج = ب جب ا + \tfrac{1}{2} ب^2 ہم ج جب ۲ا \\ & ۲ - ج - ا = ب جب ا ہم ج + \tfrac{1}{4} ب^2 جب ۲ا (۱ + ۲ ہم^2 ج) \end{aligned} \right\} \quad \text{(۴۶)}$$

اِنسے تقریبی حل معلوم ہوجاتا ہے جب ب، ا اور ج دے جائیں۔

(۱۰۴)

امثلہ نمبری (۱۴)

متفرق مثالیں

۱- اگر ایک کروی مثلث کے اضلاع اب، اج نقاط بَ، جَ تک خارج کئے جائیں اس طور پر کہ ب بَ، ج جَ بالترتیب اب، اج کے نیم تکملے ہوں تو ثابت کرو کہ قوس بَ جَ کرہ کے مرکز کے محاذی ایسا زاویہ بنائے گی جو اب اور اج کے وتروں کے درمیانی زاویے کے مساوی ہوگا۔

(۲) لیجنڈر کا مسئلہ ضابطہ

$$\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ا} = \frac{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب}-\text{ج})\,\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{ج}+\text{ا}-\text{ب})}{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{ب}+\text{ج}-\text{ا})\,\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})}$$

سے اخذ کرو۔

(۳) اگر کرہ پر کے ایک چھوٹے دائرہ میں ذواربعۃ الاضلاع ا ب ج د کھینچا جائے ایسا کہ اس کے دو متقابلہ زاوئے ا اور ج، کرہ کے ایک قطر کے متقابلہ سروں پر واقع ہو سکیں تو ثابت کرو کہ ضلعوں کی جیب التماموں کا مجموعہ مستقل ہے۔

(۴)۔ اگر ایک کروی مثلث میں ا = ب = ۲ ج تو ثابت کرو کہ

جم ا جم $\tfrac{1}{2}$ ا = جم (ج + $\tfrac{1}{2}$ ا)

(۵) ا ب ج ایک کروی مثلث ہے جس کا ہر ضلع ایک ربع کے مساوی ہے۔ مثلث کے اندر کوئی نقطہ پ ہے۔ ثابت کرو کہ

جم پ ا جم پ ب جم پ ج + جم ب پ ج جم ج پ ا جم ا پ ب = ۰

اور مس ا پ ب مس ب پ ج مس ج پ ا = ۱

(۶) اگر ایک متساوی الاضلاع مثلث ا ب ج کا نقطہ وسطی و ہو اور کرہ کی سطح پر کوئی نقطہ پ ہو تو

$\tfrac{1}{4}$ (مس پ و مس و ا)^2 (جم پ ا + جم پ ب + جم پ ج)^2

= جم^2 پ ا + جم^2 پ ب + جم^2 پ ج - جم پ ب جم پ ج - جم پ ج جم پ ا - جم پ ا جم پ ب

(۷) اگر مثلث ا ب ج کا ہر ضلع ایک ربع ہو اور اس کے اندرونی دائرہ کا قطب و اور کرہ پر کوئی نقطہ پ ہو تو

(جم پ ا + جم پ ب + جم پ ج)^2 = ۳ جم^2 پ و

(٨) کرہ کی سطح پر کے تین نقطوں میں سے ہر نقطہ سے کرہ کی سطح پر کے دوسرے تین نقطوں تک قوسیں کھینچی گئی ہیں۔ دوسرے تین نقطے کرہ پر کے ایک بڑے دائرہ پر واقع ہیں اور قوسوں کی جیوب التمام (ا، ب، ج)، (اَ، بَ، جَ)، (اً، بً، جً) ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\text{ا بَ جً + اَ ب جً + اً بَ ج = ا بً جَ + اَ بً ج + اً ب جَ}$$

(٩) دفعات ٢٢٠ اور ٢٢١ سے ثابت کرو کہ تقریبی طور پر

$$\text{لوک به = لوک عه + لوک جب ب ـ لوک جب ا} + \frac{\text{سَ}}{٣\,\text{ر}^{٢}}(\text{م ا ـ م ب})$$

(١٠) دفعہ ٢١٤ کے عمل تقرب کو جاری رکھتے ہوئے اس طور پر کہ ر٤ کی (١٨٥)
ارقام بھی شامل ہو جائیں ثابت کرو کہ

$$\text{جم ا = جم اَ} - \frac{\text{به جه جب}^{٢}\,\text{اَ}}{٦\,\text{ر}^{٢}} + \frac{\text{به جه (عه}^{٢}\text{ ـ ٣ به}^{٢}\text{ ـ ٣ جه}^{٢}\text{) جب}^{٢}\,\text{اَ}}{١٨٠\,\text{ر}^{٤}}\ \text{تقریباً}$$

(١١) نتیجہ ماسبق سے ثابت کرو کہ اگر ا = اَ + ط، تو تقریباً

$$\text{ط} = \frac{\text{به جه جب اَ}}{٦\,\text{ر}^{٢}}\left(١ + \frac{\text{عه}^{٢} + ٧\,\text{به}^{٢} + ٧\,\text{جه}^{٢}}{١٢٠\,\text{ر}^{٢}}\right)$$

(١٢) ایک متساوی الاضلاع مثلث ایک کرہ پر جس کا نصف قطر ر ہے کھینچا گیا ہے۔ اس کا ہر ضلع ایک بڑے دائرہ کے محیط کے ایک ثلث سے بقدر ک کے چھوٹا ہے جہاں ک ایک چھوٹی مقدار ہے۔ ثابت کرو کہ قطبی مثلث کے ایک ضلع کا مربع تقریباً $٤\,\text{ر ک}\,\sqrt{٣}$ ہے۔

(۱۸۶)

تیرہواں باب

تقسیم الارضی اعمال

۲۲۷ — علم مثلث کروی و مستوی دونوں کے اہم ترین اطلاقات میں سے ایک، خود زمین کی اور اس کی سطح کے کسی حصہ کی شکل اور ابعاد کی تعئین پر ہے۔ ہم اس مضمون کا ایک مختصر سا خاکہ دینگے۔ اس سے زیادہ معلومات کے لئے دیکھو انسائیکلوپیڈیا برٹانیکا میں Geodesy پر مضمون، انسائیکلوپیڈیا میٹروپالیٹانا میں Figure of the Earth پر ایری کا مقالہ، اور کرنل اے۔ آر۔ کلارک کی تالیف Geodesy جو کلارینڈن مطبع سے ۱۸۸۰ء میں شائع ہوئی۔ پیمائش (Survey) میں جن اعمال سے واسطہ پڑتا ہے انکی تفصیلات سے عملی طور پر پوری طرح آگاہ ہونیکے لئے بڑے بڑے پیمائشوں کی شائع شدہ روئدادوں کا مطالعہ کرنا ضروری ہے جو زمین کے مختلف حصوں پر عمل میں لائی گئیں ہیں مثلاً لفٹنٹ کرنل ایورسٹ کی

The Account of the Measurement of two Sections of the Meridional arc of India, 1847.

یا

The Account of the Observations and Calculations of the Principal Triangulation in the Ordnance Survey of Great Britain & Ireland, 1858.

لفٹنٹ کرنل ٹی۔ پی وہائٹ کی تالیف The Ordnane Survey ۱۸۸۶ء میں نیشنل سروے کی مشہور روئداد بغیر فنی تفصیلات کے درج ہے۔

۲۲۸ — ہر پیمائش میں پہلا اہم کام ایک افقی خط کا ناپ لینا ہے جسکو عام طور پر

قاعدہ (Base) کہتے ہیں۔ اسکے لئے ایک ہموار سطح طول میں چند میل کی منتخب کیجاتی ہے اور اس پر ایک خط کو احتیاط کی تمام ممکن بندیوں کے ساتھ ناپ لیا جاتا ہے تاکہ صحت کا یقین ہو سکے۔ اس مقصد کے لئے صنوبر اور دہات کے ڈنڈے، شیشے کی مجوف نلیاں، اور فولادی زنجیریں مختلف پیمائشوں میں استعمال کی گئی ہیں۔ اثنائے پیمائش میں تپش کا احتیاط سے ساتھ مشاہدہ کیا جاتا ہے اور ڈنڈوں یا زنجیروں کے طول جو تپش کے تغیرات سے متغیر ہوتے ہیں درست کئے جاتے ہیں۔

۲۴۶۔ علاقہ زیر پیمائش کے متفاوت نقطوں پر چوکیاں قائم کرکے جھنڈے گاڑ دیئے جاتے ہیں۔ تب یہ فرض کرتے ہیں کہ جھنڈوں کو خطوں سے ملا دیا گیا ہے علاقہ زیر پیمائش مثلثوں کے ایک سلسلہ میں تقسیم ہو جاتا ہے۔ ان مثلثوں کے زاویوں کا مشاہدہ کیا جاتا ہے یعنی ان زاویوں کا جو کوئی دو جھنڈے تیسرے کے محاذی بناتے ہیں مثلاً فرض کرو کہ قاعدہ کے سرے ا اور ب سے تعبیر ہوتے ہیں اور ایک تیسرے نقطہ پر جھنڈا ج گڑا ہوا ہے جو ا اور ب سے نظر آتا ہے تو مثلث ا ب ج کے زاویوں ا ب ج اور ب ا ج کا مشاہدہ کیا جاتا ہے اور پھر ا ج اور ب ج محسوب کئے جاسکتے ہیں۔ اس کے بعد فرض کرو کہ کسی چوتھے نقطہ پر جھنڈا د نصب ہے جو ج اور ا سے نظر آتا ہے تو زاویوں ا ج د اور ج ا د کا مشاہدہ کیا جاتا ہے اور چونکہ ا ج معلوم ہے جیسا کہ اوپر بیان ہوا ج د اور ا د کا حساب لگایا جاسکتا ہے۔

۲۴۷۔ اصلی قاعدے کے علاوہ زیر پیمائش علاقہ کے مختلف سہولت بخش حصوں میں دوسرے خطوط بھی ناپے جاتے ہیں اور اس طرح ناپے ہوئے طولوں کا مقابلہ ان کے تخمین کردہ طولوں کے ساتھ کیا جاتا ہے جو اصلی قاعدے سے مختلف مثلثوں کو حل کرنے سے حاصل ہو چکے ہوتے ہیں۔ ناپا ہوا طول تخمین کردہ طول سے جس قدر

قریب ہوگا اسقدر پیمائش کو کامیاب اور صحیح تصور کیا جائے گا۔ برطانیہ اور آئرلینڈ کے Ordnance Survey میں متعدد خط ناپے گئے ہیں جنمیں سے آخر کے دو خطوں ہیں سے ایک خط آئرلینڈ میں Lough Foyle کے نزدیک ہے۔ اسکو ۱۸۲۷ء اور ۱۹۲۸ء میں ناپا گیا تھا۔ دوسرا خط Salisbury Plain پر ہے۔ اس کو ۱۸۴۹ء میں ناپا گیا تھا۔ Lough Foyle کے نزدیک کا خط تقریباً ۸ میل طویل ہے اور Salisbury Plain پر کا خط تقریباً ۷ میل۔ اس آخری خط کے نپے ہوے طول اور تخمین کردہ طول میں فرق ۵ انچ سے بھی کم ہے۔ اس کی تخمین میں لف فائل کے خط کو قاعدہ تسلیم کیا گیا تھا۔

(دیکھو An Account of the Observations......... صفحہ ۴۱۹)

۲۳۱۔ پیمائش میں تمام مثلثوں کے ضلعوں کے طول معلوم کرنے میں جو حسابات عمل میں لائے جاتے ہیں ان کے طریقے مختلف ہیں۔ (۱۸۸)
ایک طریقہ علم مثلث کروی کے ٹھیک ٹھیک ضابطوں کو استعمال کرنے کا ہے۔ اس میں زمین کا نصف قطر تقریباً معلوم خیال کیا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ یہ نصف قطر ر سے تعبیر ہوتا ہے۔ تب اگر زمین پر کسی قوس کا طول ع ہو تو اس قوس کے محاذی زمین کے مرکز پر کے زاویہ کا دائری ناپ $\frac{ع}{ر}$ ہے۔ اب $\frac{ع}{ر}$ کے مثلثی تفاعلوں کے لئے علم مثلث کروی کے ضابطوں سے جدولے حل سکتے ہیں اور اسلئے $\frac{ع}{ر}$ معلوم ہوسکتا ہے اور پھر ع، $\frac{ع}{ر}$ چونکہ عملی مقاصد کے لئے بہت چھوٹا ہوتا ہے اس لئے ان اعمال حساب میں تحفظ صحت کے طریقوں پر خاص توجہ دینی ضروری ہے جنمیں چھوٹے زاویوں کے لوکارتمی مثلثی تفاعل شامل ہوتے ہیں۔ (دیکھو مصنف کا علم مثلث مستوی دفعہ ۲۰۵)۔

علم مثلث کروی کی مدد سے مثلثوں کا ٹھیک حل معلوم کرنے کی بجائے تقریب کے دوسرے طریقے تجویز کئے گئے ہیں۔ ان میں سے دو طریقے کثرت سے استعمال ہوتے ہیں۔ ایک طریقہ یہ ہے کہ کروی مثلثوں کے زاویوں کی مدد سے وتری مثلث کے زاویوں کو اخذ کیا جائے اور پھر علم مثلث مستوی کی مدد سے موخر الذکر مثلثوں کو حل کیا جائے (دیکھو دفعہ ۲۱۳)۔

تقریب کا دوسرا طریقہ لیجنڈر کے مسئلہ کے استعمال پر مبنی ہے (دیکھو دفعہ ۲۱۴)۔

۲۳۲۔ ڈلمبر نے محولہ بالا تینوں طریقوں کو فرنچ سروے میں مثلثوں کو حل کرنے کے لئے استعمال کیا تھا (دیکھو Base du Systeme Metrique Tome III, p. 7)

برطانیہ عظمی اور آئرلینڈ کے ٹرگنو میٹریکل سروے کے ابتدائی اعمال میں مثلثوں کو وتری طریقے کے ذریعہ محسوب کیا گیا تھا لیکن اب ایک زمانہ سے یہ طریقہ متروک ہے اور اس کی بجائے بالعموم لیجنڈر کا مسئلہ اختیار کیا جاتا ہے (دیکھو.... An Account of the Observation صفحہ ۲۴۴)

انڈین سروے میں جیسا کہ لفٹنٹ کرنل ایورسٹ کہتا ہے لیجنڈر کے مسئلہ سے ہی مثلثوں کو محسوب کیا گیا ہے۔

An account of the Measurement page CL VIII

۲۳۳۔ اگر مثلث مستوی کے تینوں زاویوں کو مشاہدے کے ذریعہ معلوم کیا جائے تو مشاہدات کی صحت کی تنقیح اس واقعہ سے کیجاتی ہے کہ آیا ان تینوں زاویوں کا مجموعہ دو قائمہ کے مساوی ہے (۱۸۹) اب ہم یہ دیکھیں گے کہ زمین کی سطح پر کے کروی مثلثوں کے زاویوں کا مشاہدہ کیا جائے تو مشاہدات کی صحت کو پرکھنے کی کسوٹی کس طرح کروی اضافہ سے حاصل ہوسکتی ہے۔

۲۳۴۔ زمین کی سطح پر بنے ہوئے کروی مثلث کا رقبہ

مربع فٹوں میں معلوم ہو تو کروی اضافہ کو ثانیوں میں محسوب کرنے کیلئے ایک قاعدہ مطلوب ہے۔

فرض کرو کہ کروی اضافہ میں ثانیوں کی تعداد ن ہے، مثلث کے رقبہ میں مربع فٹوں کی تعداد س، اور زمین کے نصف قطر میں فٹوں کی تعداد ر۔ اگر کروی اضافہ کا دائری ناپ ع ہو تو

$$س = ع ر^۲$$

اور $$ع = \frac{ن \pi}{۶۰ \times ۶۰ \times ۱۸۰} = \frac{ن}{۲۰۶۲۶۵}$$ تقریباً

اس لئے $$س = \frac{ن ر^۲}{۲۰۶۲۶۵}$$

اب چونکہ عملی طور پر پیمائش کرنے سے زمین کی سطح پر ایک درجہ کا اوسط طول ۳۶۵۱۵۵ فٹ معلوم ہوا ہے اس لئے

$$\frac{\pi ر}{۱۸۰} = ۳۶۵۱۵۵$$

اس مساوات سے ر کی قیمت معلوم ہوتی ہے اور پھر لوکارثمی عمل حساب سے

$$لوک\ ن = لوک\ س - ۹٫۳۲۶۲۷۴$$

اسلئے س کے معلوم ہونے پر ن معلوم ہو جاتا ہے۔

اس ضابطہ کو جنرل رائے کا قاعدہ کہتے ہیں کیونکہ جنرل موصوف نے اس کو برطانیہ عظمیٰ اور آئرلینڈ کے سروے میں استعمال کیا تھا لیکن مسٹر ڈیویس اس کو مسٹر ڈالبی سے منسوب کرتے ہیں۔ (دیکھو ڈیویس کی Hotton's course of Mathematic جلد دوم صفحہ ۲۰)

۱۹۰) ۵۳ نوٹ۔ جنرل رائے کے قاعدہ کو اسوقت استعمال کیا جا سکتا ہے جبکہ کروی مثلث کا رقبہ معلوم ہو۔ لیکن یہ رقبہ بالکل ٹھیک معلوم نہیں ہو سکتا

جب تک کہ کروی مثلث کے عناصر ٹھیک ٹھیک معلوم نہ ہوں۔ تاہم یہ معلوم ہوا ہے کہ عملاً جو صورتیں پیش آتی ہیں ان میں رقبہ کی تقریبی قیمت کافی ہے۔ مثلاً فرض کرو کہ کروی مثلث کے رقبہ کی بجائے اُس مثلث مستوی کا رقبہ استعمال کیا گیا ہے جس کا ذکر لیجنڈر کے مسئلہ میں آچکا ہے تو دفعہ ۲۱۸ سے یہ معلوم ہوگا کہ اس سے جو خطا واقع ہوتی ہے وہ کسر

$$\frac{عہ^2 + بہ^2 + جہ^2}{24 \, ر^2} \times \text{مثلث مستوی کا رقبہ}$$

سے تقریباً تعبیر ہوگی اور یہ کسر ۱... ۰ سے بھی کم ہے اگر اضلاع طول میں ۱۰۰ میل سے متجاوز نہ ہوں۔ یا فرض کرو کہ ہم زاویوں کی خطاؤں کا اثر مثلث کے رقبہ کی تخمین پر معلوم کرنا چاہتے ہیں، فرض کرو کہ ایک خطا کا دائری ناپ ھ ہے، اس لئے $\frac{1}{2}$ عہ بہ جب ج کی بجائے ہمیں $\frac{1}{2}$ عہ بہ جب (ج + ھ) استعمال کرنا چاہئے۔ پس خطا کو رقبہ کے ساتھ جو نسبت ہے وہ تقریباً ھ ہم ج سے تعبیر ہوتی ہے، لیکن مشاہدات کے جدید طریقوں سے ھ چند ثانیوں کے دائری ناپ سے تجاوز نہیں کریگا۔ اس لئے اگر ج بہت چھوٹا نہ ہو تو ھ ہم ج عملاً ناقابل التفات ہے۔

۲۳۶ — تقسیم الارضی اعمال میں بڑے سے بڑے مثلث بھی جو مشاہدہ کرنے کے قابل ہو سکتے ہیں زمین کی سطح کے مقابلہ میں اسقدر چھوٹے ہوتے ہیں کہ ان کا کروی اضافہ بالعموم چند ثانیوں سے بڑھنے نہیں پاتا۔ ایک ثانیہ کا کروی اضافہ پیدا کرسکنے کے لئے مثلث میں تقریباً ۷۶ مربع میل مطلوب ہوتے ہیں۔ انگلش سروے کے بڑے سے بڑے مثلثوں میں چند ہی ایسے مثلث ہیں جن کا کروی اضافہ ۲۰ ثانیوں سے زیادہ ہے۔ اس سروے میں بڑے سے بڑا کروی اضافہ ۶۴ ثانیہ تھا۔

۲۳۷ — انگلش سروے کے مثلثوں میں سے حسب ذیل مثال کا انتخاب

اوڈہاس نے کیا تھا جس کو دیگر مصنفین نے بھی اختیار کیا ہے۔ ایک مثلث کے مشاہدہ کردہ زاوئے علی الترتیب ہیں

۴۲° ۲′ ۳۲″، ۶۷° ۵۵′ ۳۹″، ۷۰° ۱′ ۴۸″

یہ فرض کرکے کہ زاویہ ا کے مقابل کا ضلع ۲،۴۰۴۲،۲ فٹ ہے مشاہدات میں جو خطائیں واقع ہوئی ہیں اُنکا مجموعہ معلوم کرو۔ حل (ا۲ جب ب جب ج)/(۲ جب ا) (۱۹۱)
سے رقبہ محسوب کیا جاتا ہے اور جنرل رائے کے قاعدہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ن = ۲۳٫۰″۔ اب مشاہدہ کردہ زاویوں کا مجموعہ ۱۸۰° - ۱″ ہے اور اس کو چونکہ ۱۸۰° + ۲۳٫۰″ ہونا چاہئے تھا اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مشاہدات کی خطاؤں کا مجموعہ ۲۳٫۱″ ہے۔ اس مجموعی خطا کو مشاہدہ کردہ زاویوں میں اُس تناسب سے تقسیم کیا جاسکتا ہے جو مشاہد کی رائے میں مناسب معلوم ہو۔ ایک طریقہ یہ ہے کہ ہر مشاہدہ کردہ زاویہ میں ۲۳٫۱″ کے ایک ثلث کا اضافہ کیا جائے اور اس طرح جو زاوئے حاصل ہوں اُن کو اصلی زاوئے قرار دیا جائے۔

۲۳۸ — مثلث کی شکل کے لحاظ سے ایک تحقیقات عمل میں آئی ہے جسمیں زاویوں کے مشاہدات کی خطائیں ضلعوں کے طولوں پر کم سے کم اثر ڈالتی ہیں اور گو استدلال واضح نہیں ہے لیکن پھر بھی طالب علم کو اسپر التفات کرنی چاہئے۔ فرض کرو کہ مثلث کے تینوں زاوئے مشاہدہ کئے گئے اور ایک ضلع، مثلاً ا، معلوم ہے تو مثلث کی شکل معلوم کرنی مطلوب ہے تاکہ دوسرے ضلعوں پر مشاہدات کی خطاؤں کا کم سے کم اثر پڑے۔ مثلث کا کروی اضافہ عملی اغراض کے لئے کافی صحت کے ساتھ معلوم فرض کیا جاسکتا ہے اور اگر مشاہدہ کردہ زاویوں کا مجموعہ دو قائمہ سے بقدر واجبی کروی اضافہ کے تجاوز نہ کرتا ہو تو فرض کرو کہ ہر زاویہ میں ایک ہی مقدار کا اضافہ کیا گیا ہے تاکہ ان کا مجموعہ درست بن جائے۔ فرض کرو کہ مشاہدہ کرنے سے اور ان کو اگر ضرورت ہو تو

حسب قاعدہ بالا بدلنے سے زاویے ا، ب، ج حاصل ہوتے ہیں اور فرض کروکہ ا، ب، ج میں خطائیں علی الترتیب مف ا، مف ب، مف ج سے تعبیر ہوتی ہیں تو مف ا + مف ب + مف ج = ۰ کیونکہ بموجب فرض ا، ب، ج کا مجموعہ درست ہے۔ مثلث کو تقریباً مستوی خیال کرنے سے ضلع ج کی اصلی قیمت ہے

ا جب (ج + مف ج) / جب (ا + مف ا) ، یعنی ا جب (ج + مف ج) / جب (ا - مف ب - مف ج) ،

اب تقریباً

جب (ج + مف ج) = جب ج + مف ج جم ج ،

جب (ا - مف ب - مف ج) = جب ا - (مف ب + مف ج) جم ا

پس تقریباً (۱۹۲)

ج = (ا جب ج / جب ا) {۱ + مف ج مم ج} {۱ - (مف ب + مف ج) مم ا}^(-۱)

= (ا جب ج / جب ا) {۱ + مف ب مم ا + مف ج (مم ج + مم ا)} ،

اور مم ج + مم ا = جب (ا + ج) / جب ا جب ج = جب ب / جب ا جب ج تقریباً

اسلئے ج کی خطا ہے تقریباً

(ا جب ب / جب² ا) مف ج + (ا جب ج جم ا / جب² ا) مف ب

اسی طرح ب کی خطا ہے تقریباً

(ا جب ج / جب² ا) مف ب + (ا جب ب جم ا / جب² ا) مف ج

اب خطاؤں مف ب اور مف ج کی مقداروں اور علامتوں کو ٹھیک ٹھیک متعین کرنا ناممکن ہے، اس لئے استدلال مبہم ہونا چاہیے

یہ ظاہر ہے کہ خطا کو خفیف بنانے کے لئے جب ا کو چھوٹا نہ ہونا چاہئے، اور چونکہ مف ا، مف ب، مف ج کا مجموعہ صفر ہے اس لئے ان میں سے دو کی علامت وہی ہونی چاہئے اور تیسری کی مختلف۔ پس ہم اس بات کو زیادہ اغلب تصور کر سکتے ہیں کہ کوئی دو مثلاً مف ب اور مف ج ہم علامت ہونے کی بجائے مختلف العلامت ہوں۔

اگر مف ب اور مف ج مختلف العلامت ہیں تو ب اور ج کی خطائیں جبکہ جم ا مثبت ہو ان خطاؤں سے کم ہونگی جبکہ جم ا منفی ہو اسلئے ا ایک زاویہ قائمہ سے کم ہونا چاہئے اور اگر مف ب اور مف ج میں بہت زیادہ تفاوت نہیں ہے تو ب اور ج تقریباً مساوی ہونے چاہئیں۔ یہ شرطیں اُس مثلث سے پوری ہونگی جو متساوی الاضلاع مثلث سے زیادہ فرق نہ رکھے۔

اگر صرف دو زاوئے ا اور ب مشاہدہ کئے جائیں تو ب اور ج کی خطاؤں کے لئے ہمیں حسب سابق وہی جملے ملتے ہیں لیکن یہاں ہمیں مف ب اور مف ج کو مختلف العلامت مان لینے کا کوئی حق نہیں ہے۔ اس صورت میں ا کو قائمہ فرض کرلینے سے بہت ممکن ہے کہ خطائیں خفیف ترین ہوں۔

۲۳۹ — دفعہ گذشتہ کا مضمون علم مثلث پر کے اُس مقالہ سے لیا گیا (۱۹۳)
ہے جو انسائیکلوپیڈیا میٹری پالیٹنا میں درج ہے۔ اس میں سب سے زیادہ غیر اطمینان بخش وہ حصہ ہے جہاں مف ب اور مف ج کا تقریباً مساوی ہونا فرض کیا گیا ہے، کیونکہ مف ا + مف ب + مف ج = ۰ اور اس لئے اگر ہم مف ب اور مف ج کو تقریباً مساوی اور مختلف العلامت مان لیں تو اس کے یہ معنے ہیں کہ ہم مف ا = ۰ فرض کر رہے ہیں، اس طرح تین زاویوں کے مشاہدات میں گویا ہم نے یہ فرض کرلیا کہ ایک مشاہدے میں کچھ خطا ہوئی، دوسرے مشاہدے

میں وہی عددی خطا ہوئی مگر مختلف علامت کے ساتھ، اور تیسرے میں کوئی خطا نہیں ہوئی۔

۲۴۰ — ہم نے اب تک جو کچھ بیان کیا ہے وہ اس فرض پر کہ زمین ایک کرہ ہے لیکن فی الواقع ایسا نہیں ہے کیونکہ زمین چھوٹے خروج المرکز کا تقریباً ایک کرہ نما ہے۔ ہمارے اس مفروضے سے اعمال حساب میں تھوڑی چھوٹی خطائیں واقع ہونی چاہئیں، ان کی تصحیحات کے لئے دفعہ ۲۴۷ میں بیان کردہ تالیفات کا مطالعہ کیا جائے۔ ان کتابوں میں جو نتیجے حاصل ہوئے ہیں ان میں سے ایک یہ ہے کہ زمین کو کرہ نما کی بجائے کرہ تسلیم کرنے سے جو خطا واقع ہوتی ہے وہ بمقدار اتنی ہے جیسے مثلث کا فی طور مشہور مثلث یا متساوی الاضلاع مثلث کی شکل سے ہوتا ہے (An Account of the Observalious....... صفحہ ۲۴۳)۔ بعض حالات کے تحت کروی اضافہ کرہ پر بھی وہی ہوتا ہے اور کرہ نما پر بھی وہی (دیکھو انسائیکلوپیڈیا برٹینیکا میں مضمون Figure of the Earth صفحہ ۱۹۸ اور ۲۱۵)۔

۲۴۱ — تقسیم الارضی اعمال میں بعض اوقات دو نقطوں کے درمیان جو افق سے چھوٹے زاویائی فاصلہ پر ہوں افقی زاویہ معلوم کرنا مطلوب ہوتا ہے جبکہ ان کے محاذی بننے والا زاویہ اور نیز زوایائے ارتفاع یا انخفاض معلوم ہوں۔

فرض کرو کہ و ا اور و ب وہ سمتیں ہیں جنہیں یہ نقطے و سے دکھائی دیتے ہیں اور فرض کرو کہ زاویہ ا و ب کا مشاہدہ کیا گیا ہے۔ فرض کرو کہ مشاہد کے افق پر علی القوائم سمت و ے ہے۔ و کو مرکز مان کر اس کے گرد ایک کرہ کھینچو اور فرض کرو کہ و ا اور و ب میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی، افق سے علی الترتیب و ج اور و د پر ملتے ہیں تو زاویہ ج و د مطلوب ہے۔

(۰۹۰) فرض کرو کہ ا و ب = ط، ج و د = ط + لا،

ا و ج = ھ ، ب و د = ک ،

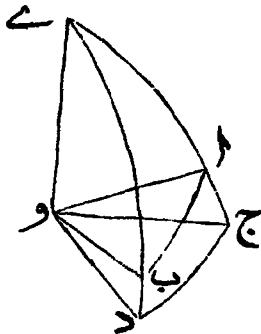
تو مثلث ا ے ب سے

جم ا ے ب = (جم طہ - جم ے ا جم ے ب) / (جم ے ا جب ے ب)

= (جم طہ - جب ھ جب ک) / (جم ھ جم ک)

اور جم ا ے ب = جم ج و د = جم (طہ + لا)،

اسلئے جم (طہ + لا) = (جم طہ - جب ھ جب ک) / (جم ھ جم ک)



یہ ضابطہ ٹھیک ہے۔ تقریب سے حاصل ہوتا ہے

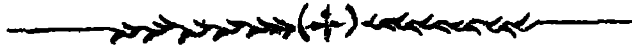
جم طہ - لا جب طہ = (جم طہ - ھ ک) / (۱ - ½ (ھ۲ + ک۲))

اس لئے لا جب طہ = ھ ک - ½ (ھ۲ + ک۲) جم طہ، تقریباً

اور لا = (۲ ھ ک - (ھ۲ + ک۲) (جم۲ ½ طہ - جب۲ ½ طہ)) / (۲ جب طہ)

= ¼ (ھ + ک)۲ مس ½ طہ - ¼ (ھ - ک)۲ مم ½ طہ

اس عمل کو جس کے ذریعہ ہم زاویہ ج و د کو زاویہ ا و ب سے معلوم کرتے ہیں "زاویہ کو افق پر تحویل کرنا" کہیں گے۔



(۱۹۵)

چودھواں باب

کروی مثلث کے اجزاء میں صغیر تغیرات

۲۴۲ - بعض اوقات یہ معلوم کرنا اہم ہوتا ہے کہ کسی چھوٹی خطا کی وجہ سے جو مثلث کے دئے ہوئے اجزاء میں موجود ہو سکتی ہے خطا کی کتنی مقدار مثلث کے محسوب کردہ اجزاء میں سے ایک میں داخل ہوگی۔ ہم یہاں ایک مثال پر غور کرینگے۔

۲۴۳ - ایک کروی مثلث کا ایک ضلع اور اس کے مقابل کا زاویہ مستقل رہتے ہیں۔ اس کے عناصر کے کسی دوسرے زوج کے چھوٹے تغیرات کے درمیان ربط معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ج اور ج مستقل رہتے ہیں۔

(۱) دوسرے دو ضلعوں کے صغیر تغیرات کے درمیان ربط معلوم کرنا ہے۔ فرض کرو کہ مستقل عناصر ج اور ج سے بننے والے ایک مثلث کے دوسرے ضلع ا اور ب سے تعبیر ہوتے ہیں اور ایسے ہی ایک اور مثلث کے ضلع ا + مف ا اور ب + مف ب سے۔ اب ہمیں نسبت مف ا : مف ب مطلوب ہے جبکہ مف ا اور

مف ب لاانتہا چھوٹے ہوں۔ ہم جانتے ہیں کہ

جم ج = جم ا جم ب + جب ا جب ب جم ج

اور جم ج = جم (ا + مف ا) جم (ب + مف ب)

+ جب (ا + مف ا) جب (ب + مف ب) جم ج

نیز جم (ا + مف ا) = جم ا ۔ جب ا مف ا تقریباً

اور جب (ا + مف ا) = جب ا + جم ا مف ا تقریباً

اور اسی طرح کے ضابطے جم (ب + مف ب) اور جب (ب + مف ب) کے لئے۔ (دیکھو مصنف کا علم مثلث مستوی باب دوازدہم)۔ اسلئے

جم ج = (جم ا ۔ جب ا مف ا) (جم ب ۔ جب ب مف ب)

+ (جب ا + جم ا مف ا) (جب ب + جم ب مف ب) جم ج

(۱۹۶) پس عمل تفریق سے اور حاصل ضرب مف ا مف ب کو نظر انداز کرنے سے

۰ = مف ا (جب ا جم ب ۔ جم ا جب ب جم ج)

+ مف ب (جب ب جم ا ۔ جم ب جب ا جم ج) .....(۱)

اس سے ا، ب، ج کی رقوم میں نسبت مف ا : مف ب معلوم ہوتی ہے۔ ہم اس نسبت کو سادہ تر صورت میں ا اور ب کی رقوم میں بیان کرسکتے ہیں۔ اس غرض کے لئے ہمیں دفعہ ۵۲ (۱۹) کے نمونے کے ضابطے استعمال کرنے ہونگے چنانچہ اس طرح حاصل ہوتا ہے

مف ا جب ج جم ب + مف ب جب ج جم ا = ۰

یا مف ا جم ب + مف ب جم ا = ۰ ....(۲)

(۲) دوسرے دو زاویوں کے چھوٹے تغیرات کے درمیان ربط معلوم کرنا۔ اس صورت میں قطبی مثلث کے ذریعہ متذکرہ صدر نتیجہ سے ہم اخذ کرسکتے ہیں

مف ا جم ب + مف ب جم ا = ۰

اس کو علحدہ طور پر بھی حسب طریقۂ ماسبق معلوم کیا جاسکتا ہے۔

(۳) ایک ضلع اور اس کے مقابل کے زاویہ (یعنی ا ′ ا) کے چھوٹے تغیرات کے درمیان ربط معلوم کرنا۔

یہاں جب ا جب ج = جب ج جب ا

اور جب (ا + مف ا) جب ج = جب ج جب (ا + مف ا)

پس عمل تفریق سے

جم ا جب ج مف ا = جب ج جم ا مف ا

اور اس لئے مف ا مم ا = مف ا مم ا .... (۴)

(۴) ایک ضلع اور متصلہ زاویہ (ا ′ ب) کے صغیر تغیرات کے درمیان ربط معلوم کرنا۔ ہم جانتے ہیں کہ

مم ج جب ب = مم ج جب ا - جم ب جم ا ′

گذشتہ کی طرح عمل کرنے سے

مم ج جم ب مف ب = مم ج جم ا مف ا + جم ب جب ا مف ا
+ جم ا جب ب مف ب

اسلئے

(مم ج جم ب - جم ا جب ب) مف ب
= (مم ج جم ا + جم ب جب ا) مف ا

اس لئے (جم ا / جب ج) مف ب = (جم ب / جب ج) مف ا

اس لئے مف ب جم ا = - مف ا مم ب جب ب ..... (۵)

روابط (۳) اور (۴) سے مف ا کو ساقط کردیا جائے تو یہ نتیجہ زیادہ مختصر صورت میں حاصل ہو سکتا ہے۔

۲۴۴ — جب مثلث کے سب عنصروں میں خفیف تغیرات واقع ہوں تو ان سب خفیف تغیرات کے درمیان روابط معلوم کرنا۔ (۱۹۴)

یہ سب سے عام مسئلہ ہے۔ اس سے ہم وہ نتیجے اخذ کر سکتے ہیں جو کسی مخصوص مسئلہ کے مناسب ہوں۔ چنانچہ ایسے نتیجے ان

عنصروں کے تغیرات کی بجائے جو مستقل رہتے ہیں صفر درج کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ ہم نمونہ ذیل کی تین تساویوں کو لیتے ہیں:۔

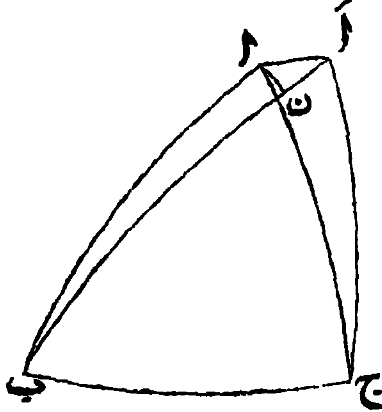
جم ا = جم ب جم ج + جب ب جب ج جم ج ۔۔۔۔ (۶)

ان پر اسی طرح کا طریق عمل جاری کرو جو دفعہ ماسبق میں واضح کردیا گیا ہے اور اس بات کی رعایت رکھو کہ تمام عناصر متغیر ہوتے ہیں۔ اس طرح ہمیں حسب ذیل مساواتیں ملتی ہیں

مف ا ۔ جم ج مف ب ۔ جم ب مف ج = جب ب جب ج مف ا
۔ جم ج مف ا + مف ب ۔ جم ا مف ج = جب ج جب ا مف ب　　(۷)
۔ جم ب مف ا ۔ جم ا مف ب + مف ج = جب ا جب ب مف ج

ان روابط کو اساسی قرار دیا جا سکتا ہے ۔ ان سے عمل اسقاط کے ذریعہ مثلث کے عناصر میں سے کسی چار کے تغیرات کے درمیان ربط معلوم کرنا آسان ہے۔

۲۴۵ ۔ ہندسی طریقہ ۔ خفیف تغیرات کی قیمت معلوم کرنیکا ہندسی طریقہ (فلکی مسائل میں خصوصاً) مفید اور آگاہی بخش ہے۔ اسکو ہم ایک مثال کے ذریعہ واضح کرینگے۔



(۱۹۸) ایک کروی مثلث کے ضلع ج. میں ایک خفیف تغیر مفاج واقع ہوتا ہے لیکن دوسرے ضلعوں کے طول غیر متغیر رہتے ہیں۔ زاویوں اَ، بَ اور ج میں پیدا شدہ تغیرات معلوم کرنا مطلوب ہے۔

فرض کرو کہ مثلث اب ج کے ضلع اَ، بَ، ج ہیں اور مثلث اَ ب ج کے اَ، بَ، ج + مفاج جو اُسی قاعدہ ب ج پر بنایا گیا ہے اگر قبل الذکر مثلث کے زاوئے اَ، بَ، ج ہوں تو موخرالذکر مثلث کے زاوئے اَ + مفاَ، بَ + مفابَ، ج + مفاج ہونگے۔ اسلئے

د اج اَ = مفاج اور د اب اَ = - مفاب

قوس ان، ب اَ پر عمود کھینچو۔ قائم الزاویہ مثلث ان ب میں

جب ان = جب اب جب اَ ب ن

اور مس ب ن = مس اب جم اَ ب ن

اور اس لئے جب رتبہ مفاب کی رقمیں نظر انداز کردی جاتی ہیں تو

ان = - مفاب جباج

ب ان = ج

اور نیز اسلئے ن اَ = ب اَ - ب ن = مفاج

اسی طرح، چونکہ ج اَ = ج اَ اس لئے ج میں سے اَ اَ پر عمود اور اسکو تنصیف کرنے والی قوس کھینچنے سے یہ بآسانی معلوم ہوسکتا ہے کہ

اَ اَ = مفاج جب ب

اس لئے بڑے دائرہ کی قوس اَ اَ اُس چھوٹے دائرہ کی متناظر قوس پر تقریبًا طور پر منطبق ہوتی ہے جس کا مرکز ج اور نصف قطر ج اَ ہے اور اس لئے زاوئے ج اَ اَ اور ج اَ اَ تقریبًا قائمہ ہیں۔ اسلئے پہلے تقریب تک

ذ ن اَ اَ = اَ

مثلث ان اَ کے ضلع اسقدر چھوٹے ہیں کہ اسکو مثلث مستوی خیال کیا جا سکتا ہے ۔ اس لئے

ان = ن اَ م اَ ' ا اَ = ن اَ قم ا

ان میں ان ' ن اَ اور ا اَ کی قیمتیں جو اوپر حاصل کی گئیں ہیں مندرج کرنے سے

مف ب = ۔ مف ج مم ا قم ج

مف ج = مف ج قم ا قم ب'

اور مف ب کے ساتھ متشابہت سے' .... (۸)

مف ا = ۔ مف ج مم ب قم ج

یہ نتیجے حاصل شدہ نتیجوں (۷) کے مطابق ہیں جب ان میں رکھا جاتا ہے مف ا = ۔ ' مف ب = ۔

امثلہ نمبری (۱۵)

(۱۹۹)

(۱) ایک کروی مثلث میں اگر ج اور ج مستقل ہوں اور ا اور ب میں چھوٹے تغیرات مف ا ' مف ب واقع ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{مف ا}}{\sqrt{(\text{ا} - \text{ن}^2 \text{جب}^2 \text{ا})}} + \frac{\text{مف ب}}{\sqrt{(\text{ا} - \text{ن}^2 \text{جب}^2 \text{ب})}} = \cdot \quad \text{جہاں} \quad \text{ن} = \frac{\text{جب ج}}{\text{جب ج}}$$

(۲) اگر ج اور ج مستقل رہیں اور ا میں ایک چھوٹا تغیر پیدا کیا جائے تو مثلث کے دوسرے اجزاء میں جو تغیرات ہوتے ہیں انھیں معلوم کرو۔ رقبہ کا تغیر بھی دریافت کرو ۔

(۳) یہ فرض کرکے کہ ا اور ج مستقل رہتے ہیں ثابت کرو کہ دوسرے عناصر کے زوجوں کے چھوٹے تغیرات کے درمیان روابط ذیل درست ہیں:۔

جب ج مف ب = جب ا مف ب' مف ب جب ج = ۔ مف ج س ا

مف ا س ج = ۔ مف ج س ا ' مف ب جم ج = مف ا

مف ا س ج = مف ب جب ا ' مف ب جم ا = ۔ مف ج

(۴) یہ فرض کرکے کہ ب اور ج مستقل رہتے ہیں ثابت کرو کہ دوسرے عناصر کے زوجوں کے چھوٹے تغیرات کے درمیان روابط ذیل درست ہیں۔

مف ب مس ج = مف ج مس ب، مف ا م ج = مف ب جب ا

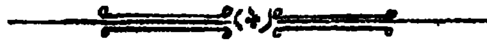
مف ا = مف ا جب ج جب ا ب، مف ا جب ب جب ا ج = مف ب جب ا

(۵) یہ فرض کرکے کہ ب اور ج مستقل رہتے ہیں ثابت کرو کہ دوسرے عناصر کے زوجوں کے صغیر تغیرات کے درمیان روابط ذیل درست ہیں۔

مف ب مس ج = مف ج مس ب، مف ا م ج = مف ب جب ا،

مف ا = مف ا جب ب جب ج، مف ا جب ب جم ج = مف ب جب ا،

(۶) اگر ا اور ج مستقل رہیں اور ب میں ایک چھوٹی مقدار کا اضافہ کیا جائے تو ثابت کرو کہ ا بڑھیگا یا گھٹیگا بموجب اسکے کہ ج ربع سے چھوٹا یا بڑا ہو۔



(۲۰۰)

پندرہواں باب

علم مثلث مستوی و کروی کے ضابطوں میں رشتہ

۲۴۶ ـ طالب علم نے یہ دیکھ لیا ہوگا کہ علم مثلث کروی کے بہت سے ضابطے ایسے ہیں جو علم مثلث مستوی کے دیگر ضابطوں کے ساتھ جنسے وہ واقف ہے مشابہت رکھتے ہیں ۔ اس مشابہت کو کافی طور پر صفحات ماسبق میں واضح کردیا گیا ہے خصوصاً آٹھویں اور نویں باب میں ۔ اب ہم بتائینگے کہ علم مثلث مستوی کے ضابطے کسطرح علم مثلث کروی کے ضابطوں سے اخذ کئے جا سکتے ہیں ۔ اس کے علاوہ ہندسہ کروی کے چند اور مسئلوں کی تحقیق کیجائے گی جو ہندسۂ مستوی کے معلومہ ضابطوں کے ساتھ تعلق رکھنے کی وجہ سے بالخصوص باعث دلچسپی ہیں۔

۲۴۷ ـ علم مثلث کروی کے کسی ضابطہ سے جو مثلث کے عناصر پر مشتمل ہو اور انمیں سے ایک عنصر ضلع ہو علم مثلث مستوی کا متناظر ضابطہ اخذ کرنا[۱] ـ

فرض کرو کہ مثلث کے ضلعوں کے طول ع، ب، جہ ہیں اور

---

[۱] ـ لگرانج ـ

کرہ کا نصف قطر ر ہے۔ پس مثلث کے ضلعوں کے دائری ناپ $\frac{\text{عہ}}{\text{ر}}$، $\frac{\text{بہ}}{\text{ر}}$، $\frac{\text{جہ}}{\text{ر}}$ ہیں۔ $\frac{\text{عہ}}{\text{ر}}$، $\frac{\text{بہ}}{\text{ر}}$، $\frac{\text{جہ}}{\text{ر}}$ کے تفاعلوں کو جو کسی مجوزہ ضابطہ میں داخل ہوں علی الترتیب $\frac{\text{عہ}}{\text{ر}}$، $\frac{\text{بہ}}{\text{ر}}$، $\frac{\text{جہ}}{\text{ر}}$ کی قوتوں میں پھیلاؤ۔ اب اگر ہم یہ فرض کریں کہ ر، لاانتہا بڑا ہو جاتا ہے تو مجوزہ ضابطہ کی انتہائی صورت علم مثلث مستوی کا ایک رشتہ ہوگا۔

(۲۰۱) مثلاً، دفعہ ۲۱۴ کے ضابطہ

$$\text{جم ا} = \frac{\text{جم ا} - \text{جم ب جم ج}}{\text{جب ب جب ج}}$$

سے ہم اخذ کرتے ہیں

$$\text{جم ا} = \frac{\text{بہ}^2 + \text{جہ}^2 - \text{عہ}^2}{2\ \text{بہ جہ}} + \frac{\text{عہ}^4 + \text{بہ}^4 + \text{جہ}^4 - 2\ \text{بہ}^2\text{جہ}^2 - 2\ \text{جہ}^2\text{عہ}^2 - 2\ \text{عہ}^2\text{بہ}^2}{24\ \text{بہ جہ ر}^2} + \ldots\ldots$$

اب فرض کرو کہ ر لاانتہا بڑا ہو جاتا ہے تو بالآخر

$$\text{جم ا} = \frac{\text{بہ}^2 + \text{جہ}^2 - \text{عہ}^2}{2\ \text{بہ جہ}}$$

اور یہ وہ جملہ ہے جو مثلث مستوی کے ایک زاویے کی جیب التمام کو ضلعوں کی رقوم میں بیان کرتا ہے۔

ایک اور مثال لو۔ دفعہ ۲۲۰ کے ضابطہ

$$\frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}}$$

سے ہم اخذ کرتے ہیں

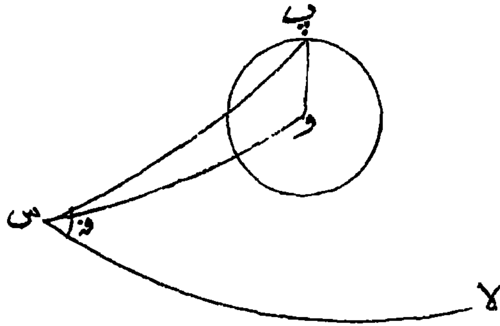
$$\frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{عہ}}{\text{بہ}} + \frac{\text{عہ}\,(\text{بہ}^2 - \text{عہ}^2)}{6\ \text{بہ ر}^2} + \ldots\ldots\ldots$$

اب فرض کرو کہ ر لاانتہا بڑا ہو جاتا ہے تو بالآخر

$$\frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{عہ}}{\text{بہ}}$$

یعنی مثلث مستوی میں ضلعوں کی نسبت، مقابل کے زاویوں کی جیوب کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔

۲۴۸ - کرہ پر کے ایک چھوٹے دائرہ کی مساوات معلوم کرنا۔



فرض کرو کہ چھوٹے دائرہ کا قطب و ہے، کرہ پر کوئی ثابت نقطہ
(۲۰۲) س اور کرہ کا ایک ثابت بڑا دائرہ س لا ہے۔ فرض کرو کہ
وس = عہ، وس لا = بہ تو اِن زاوئی محددوں عہ اور بہ سے
و کے مقام کی تعیین ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ چھوٹے دائرہ کے محیط پر
کوئی نقطہ پ ہے اور پس = طہ، پ س لا = فہ۔ اِسلئے
طہ اور فہ نقطہ پ کے محدد ہیں۔ فرض کرو کہ وپ = ر تو مثلث
وس پ سے

جم ر = جم عہ جم طہ + جب عہ جب طہ جم (فہ - بہ) ......(۱)

اس سے دائرہ کے محیط پر کے کسی نقطہ کے زاوئی محددوں کے درمیان
ایک ربط ملتا ہے۔

اگر یہ دائرہ ایک بڑا دائرہ ہو تو ر = $\frac{1}{2}$ π اور اس لئے مساوات بالا ہو جاتی ہے

. = جم عہ جم طہ + جب عہ جب طہ جم (فہ - یہ) .... (۲)

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ زمین کی مخصوص صورت میں جبکہ اسکو ایک کرہ مان لیا جاتا ہے اور اس کو شمالی یا جنوبی قطب تو زاوی محدد جو یہاں استعمال ہوئے ہیں آسانی کے ساتھ عرض بلد اور طول بلد کے رقوم میں بیان کئے جا سکتے ہیں جن سے زمین کی سطح پر کے مقامات کی تعئین ہوتی ہے کیونکہ طہ **عرض بلد کا متمم** ہے اور فہ **طول بلد** ہے۔

۲۴۹۔ دفعہ ماسبق کی مساوات (۱) کو اس شکل میں لکھ سکتے ہیں:۔

جم ر (جم^2 $\frac{1}{2}$ طہ + جب^2 $\frac{1}{2}$ طہ)

= جم عہ (جم^2 $\frac{1}{2}$ طہ - جب^2 $\frac{1}{2}$ طہ) + ۲ جب عہ جب $\frac{1}{2}$ طہ جم $\frac{1}{2}$ طہ جم (فہ - یہ)

جم^2 $\frac{1}{2}$ طہ سے تقسیم کرو اور ترتیب دو تو

مس^2 $\frac{1}{2}$ طہ (جم ر + جم عہ) - ۲ مس $\frac{1}{2}$ طہ جب عہ جم (فہ - یہ) + جم ر - جم عہ = ۰

اس دو درجی مساوات سے مس $\frac{1}{2}$ طہ کی دو قیمتیں حاصل ہونگی انکو مس $\frac{1}{2}$ طہ$_1$ اور مس $\frac{1}{2}$ طہ$_2$ سے تعبیر کرو تو

مس $\frac{طہ_1}{2}$ مس $\frac{طہ_2}{2}$ = $\frac{جم ر - جم عہ}{جم ر + جم عہ}$ = مس $\frac{عہ + ر}{2}$ مس $\frac{عہ - ر}{2}$

جس سے ظاہر ہے کہ حاصل ضرب مس $\frac{1}{2}$ طہ$_1$ مس $\frac{1}{2}$ طہ$_2$ کی قیمت فہ پر منحصر نہیں ہے۔ یہ نتیجہ مستوی دائرہ کی اس مشہور خاصیت کے جواب میں ہے جو اقلیدس حصہ سوم مسئلہ ۳۶ میں مذکور ہے۔ (دفعہ ۱۷۰ کے ساتھ مقابلہ کرو)۔

۲۵۰۔ **ایک کروی مثلث کا قاعدہ اور اسکا رقبہ دئے گئے ہیں اس کے راس کا طریق معلوم کرنا مطلوب ہے۔** (دیکھو دفعہ ۱۵۳) (۲۰۳)

فرض کرو کہ دیا ہوا قاعدہ اب ہے (ج طول کا) اور اج = طہ،
ب اج = فہ تو چونکہ رقبہ دیا گیا ہے اس لئے کروی اضافہ معلوم ہوجاتا
ہے۔ اس کو ع سے تعبیر کرو تو دفعہ ۱۳۲، (۶) اور (۷) کی رو سے

مس (فہ - ½ ع) = ہم ½ طہ ہم ½ ج جب ½ ع

اسلئے ۲ ہم ½ ج جب ½ ع جم² ½ طہ = جب طہ جب (فہ - ½ ع)

اسلئے جم طہ ہم ½ ج جب ½ ع + جب طہ جم (فہ - ½ ع + ½ π) = - ہم ½ ج جب ½ ع

دفعہ ۲۴۸ کی مساوات (ا) کے ساتھ اسکا مقابلہ کیا جائے تو ہم دیکھتے
ہیں کہ مطلوبہ طریق ایک دائرہ ہے۔ اگر ہم اس کے قطب کے زاوئی
محدودں کو عہ، بہ سے تعبیر کریں تو

مس عہ = ۱ / (ہم ½ ج جب ½ ع) = مس ½ ج / جب ½ ع

بہ = ½ ع - ½ π

تشاکل سے ہم یہ مان سکتے ہیں کہ اس دائرہ کا قطب اس بڑے
دائرہ میں واقع ہے جو اب کی علی القوائم تنصیف کرتا ہے کیونکہ اس
بڑے دائرہ کی مساوات ہے

۰ = جم طہ جم (½ π - ½ ج) + جب طہ جب (½ π - ½ ج) جم (فہ - π)

جو طہ = عہ، فہ = بہ کے لئے پوری ہوتی ہے۔

۲۵۱۔ مثلث کے اندرونی اور بیرونی دائروں کے قطبوں کے درمیان زاوئی فاصلہ معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ مثلث اب ج کے اندرونی دائرہ کا قطب پ سے
اور بیرونی دائرہ کا قطب ق سے تعبیر ہوتا ہے۔ دفعہ ۱۱۹ کی رو سے
پ اب = ½ ا اور دفعہ ۱۲۲ سے ق اب = س - ج پس

جم پ اق = جم ½ (ب - ج)

اور جم پ ق = جم پ ا جم ق ا + جب پ ا جب ق ا جم ½ (ب - ج)

(۲۰۴) اب دفعہ ۳۷ کی رُو سے (دیکھو دفعہ ۱۱۹ کی شکل)

جم پ ا = جم پ ع جم ا ع = جم رجم (س - ا)،

جب پ ا = جب پ ع / جب پ ا ع = جب ر / جب ½ ا

اس لئے

جم پ ق = جم ر جم رجم (س - ا) + جب ر جب رجم ½ (ب - ج) قم ½ ا

اس لئے دفعہ ۶۳ کی رُو سے

جم پ ق = جم ر جم رجم (س - ا) + جب ر جب رجب ½ (ب + ج) قم ½ ا

اس لئے

جم پ ق / جم ر جب ر = مم رجم (س - ا) + مس ر جب ½ (ب + ج) قم ½ ا

اب مم ر = جب س / ن، مس ر = ۲ جب ½ ا جب ½ ب جب ½ ج / ن

اس لئے

جم پ ق / جم ر جب ر = ۱/ن {جب س جم (س - ا) + ۲ جب ½ (ب + ج) جب ½ ب جب ½ ج}

= ۱/۲ن (جب ا + جب ب + جب ج)

پس (جم پ ق / جم ر جب ر)² - ۱ = ۱/۴ن² (جب ا + جب ب + جب ج)² - ۱

= (مم ر + مس ر)² (دفعہ ۱۲۴ سے)

اِس لئے جم² پ ق = جم² ر جب² ر + جم² (ر - ر)،

اور جب² پ ق = جب² (ر - ر) - جم² ر جب² ر

اس مساوات کی انتہائی شکل جبکہ مثلث مستوی ہو جاتا ہے صریحاً یہ ہے

پ ق² = (ر - ر)² - ر²

= ر^2 − ۲ ر ر$_1$

اور یہ ایک مشہور نتیجہ ہے۔

۲۵۲ - مثلث کے بیرونی دائرہ کے قطب اور اس کے کسی جانبی دائرہ کے قطب کے درمیان زاوئی فاصلہ معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ بیرونی دائرہ کا قطب ق ہے اور زاویہ ا کے مقابل کے جانبی دائرہ کا قطب ق$_1$ سے تعبیر ہوتا ہے تو یہ ثابت کیا جاسکتا (۳۰۵)
ہے کہ ق ب ق$_1$ = $\frac{1}{2}$ π + $\frac{1}{2}$ (ج − ا) اور

جم ق ق$_1$ = جم ر جم ر$_1$ جم (س − ج) − جب ر جب ر$_1$ جب $\frac{1}{2}$ (ج − ا) قط $\frac{1}{2}$ ب

= جم ر جم ر$_1$ جم (س − ج) − جب ر جب ر$_1$ جب $\frac{1}{2}$ (ج − ا) قم $\frac{1}{2}$ ب

اس لئے

$\frac{\text{جم ق ق}_1}{\text{جب ر}_1\text{ جم ر}}$ = مم ر$_1$ جم (س − ج) − س ر جب $\frac{1}{2}$ (ج − ا) قم $\frac{1}{2}$ ب

دفعہ ماسبق کی طرح تحویل کرنے سے اس آخری مساوات کا بایاں رکن ہو جاتا ہے

$\frac{1}{2\text{ن}}$ (جب ب + جب ج − جب ا)

پس

$\left(\frac{\text{جم ق ق}_1}{\text{جم ر جب ر}_1}\right)^2$ − ۱ = (س ر − مم ر$_1$)^2 ، (دفعہ ۱۲۴)

اس لئے

جم^2 ق ق$_1$ = جم^2 ر جب^2 ر$_1$ + جم^2 (ر + ر$_1$)

اور جب^2 ق ق$_1$ = جب^2 (ر + ر$_1$) − جم^2 ر جب^2 ر$_1$

مثلث مستوی کی صورت میں

$$ق ق_1^2 = (ر + ر_1)^2 - ر_1^2$$

امثلہ نمبری (۱۶)

(۱) ضابطہ جب $\frac{ع}{۲} = \sqrt{\left\{ \frac{جم س جم (س - ا)}{جب ب جب ج} \right\}}$ سے مثلث مستوی کے رقبہ کے لئے ایک جملہ اخذ کرو یعنی جملہ $\frac{ا^2 جب ب جب ج}{۲ جب ا}$ جبکہ کرہ کا نصف قطر لاانتہا بڑھا دیا جائے۔

(۲) دو مثلث ا ب ج، اَ بَ جَ، کروی یا مستوی، ہر طرح سے ایک دوسرے کے برابر محل میں صرف ذرا ایک دوسرے سے ہٹے ہوئے ہیں۔ ثابت کرو کہ

جم اَ ب جم بَ ج جم جَ ا + جم اَ ج جم جَ ب جم بَ ا = ۱

(۳) نیپیر کی تمثیلات سے علم مثلث مستوی کے ضابطے اخذ کرو۔

(۴) ڈلمبر کی تمثیلات سے علم مثلث مستوی کے ضابطے اخذ کرو۔

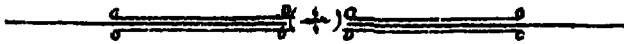
(۵) ضابطہ جم $\frac{۱}{۲}$ ج جم $\frac{۱}{۲}$ (ا + ب) = جب $\frac{۱}{۲}$ ج جم $\frac{۱}{۲}$ (ا + ب) سے مثلث مستوی کا رقبہ ضلعوں اور ایک زاویہ کی رقوم میں اخذ کرو۔

(۶) امثلہ نمبری ۶ سوال ۷ سے کیا نتیجہ حاصل ہوگا اگر کرہ کے نصف قطر کو لامتناہی فرض کیا جائے۔ (۲۰۶)

(۷) اگر کروی مثلث کا ایک زاویہ مستقل رہے لیکن متصلہ ضلع بڑے کردئے جائیں تو ثابت کرو کہ رقبہ اور زاویوں کا مجموعہ بڑھ جاتے ہیں۔

(۸) کروی مثلث کے دو زاویوں کو تنصیف کرنے والی قوسیں مقابل کے ضلعوں پر ختم ہوتی ہیں اور ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔ ثابت کرو کہ تنصیف شدہ زاویے ایک دوسرے کے مساوی ہیں بشرطیکہ انکا مجموعہ ۱۸۰° سے کم ہو۔

[فرض کروکہ یہ مساوی قوسیں ب و د اور ج و ع سے تعبیر ہوتی ہیں۔
اگر زاویے ب اور ج مساوی نہ ہوں تو فرض کروکہ ب بڑا ہے تو دفعہ ۶۷ سے
ج د، ب ع سے بڑا ہوگا۔ اور چونکہ زاویہ و ب ج، زاویہ و ج ب سے
بڑا ہے اس لئے و ج، و ب سے بڑا ہوگا۔ اس لئے و د، و ع سے بڑا ہے۔
پس زاویہ و د ج زاویہ و ع ب سے بڑا ہے بموجب مثال ۷۔ اب مثلث
ج ب ع کے مساوی دوسرے ضلع ب ج پر ایک کروی مثلث ب ج ف
بناؤ۔ چونکہ زاویہ و د ج، زاویہ و ع ب سے بڑا ہے اسلئے زاویہ ف د ج، زاویہ
د ف ج سے بڑا ہوگا۔ اس لئے ج د، ج ف سے چھوٹا ہے یعنی ج د،
ب ع سے چھوٹا ہے۔ دیکھو ہندسہ مستوی میں اس کے متناظر مسئلہ، ضمیمہ
اقلیدس صفحہ ۳۱۷]



(۲۰۷

سولھواں باب

کثیر السطوح

۲۵۳ - کثیر السطوح وہ مجسم ہے جو مُستوی مستقیم الاضلاع اشکال سے محدود ہوتا ہے۔ ان اشکال کو رخ کہتے ہیں۔ اگر مجسم کے رخ متشابہ اور متساوی منتظم کثیر الاضلاع ہوں اور اس کے مجسم زاویے ایک دوسرے کے مساوی ہوں تو اس کو منتظم کثیر السطوح کہتے ہیں۔

۲۵۴ - اگر کسی کثیر السطوح میں مجسم زاویوں کی تعداد س، اس کے رخوں کی تعداد ف، اور اس کے کناروں کی تعداد ع ہو تو س+ف=ع+۲

کثیر السطوح کے اندر کوئی نقطہ لو اور اسکو مرکز مان کر رنصف قطر کا ایک کرہ بناؤ اور مرکز سے کثیر السطوح کے راسوں تک خطوط مستقیم کھینچو۔ یہ خطوط مستقیم کرہ کی سطح کو جن نقطوں پر قطع کرتے ہیں، ان کو بڑے دائروں کی قوسوں سے ملاؤ، اس طرح کرہ کی سطح اتنے ہی کثیر الاضلاعوں میں تقسیم ہو جاتی ہے جتنے کثیر السطوح کے رُخ ہیں۔

فرض کرو کہ ان میں سے کسی ایک کثیر الاضلاع کے زاویوں کا مجموعہ س سے اور اس کے ضلعوں کی تعداد م سے تعبیر ہوتی ہے۔

اب اس کثیر الاضلاع کا رقبہ بموجب دفعہ ۱۲۹، ر۲{س-(م-۲)π} ہے۔

ایسے تمام کثیر الاضلاعوں کے رقبوں کا مجموعہ کرہ کی سطح کے رقبہ کے مساوی ہوگا یعنی ۴ π ر۲ کے ۔ پس چونکہ کثیر الاضلاعوں کی تعداد ف ہے اسلئے

$$4\pi = \Sigma\,\text{س} - \pi\,\Sigma\,\text{م} + 2\,\text{ف}\,\pi$$

اب کثیر الاضلاعوں کے تمام زاویوں کا مجموعہ Σ س سے (۲۰۸)
تعبیر ہوتا ہے اور اس لئے وہ ۲ π × مجسم زاویوں کی تعداد کے مساوی ہے یعنی ۲ π س کے ۔ سب کثیر الاضلاعوں کے سب ضلعوں کی تعداد Σ م کے مساوی ہے یعنی ۲ ع کے کیونکہ ہر کنارے سے کرہ کی سطح پر ایک ایسی قوس پیدا ہوتی ہے جو دو کثیر الاضلاعوں میں مشترک ہے ۔ اس لئے

$$4\pi = 2\pi\,\text{س} - 2\pi\,\text{ع} + 2\,\text{ف}\,\pi$$

یعنی

$$\text{س} + \text{ف} = \text{ع} + 2$$

۲۵۵ — منتظم کثیر السطوح زیادہ سے زیادہ صرف پانچ ہو سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ منتظم کثیر السطوح کے ہر رخ میں ضلعوں کی تعداد م ہے اور ہر مجسم زاویہ میں مستوی زاویوں کی تعداد ن ہے تو مستوی زاویوں کی کل تعداد م ف سے یا ن س سے یا ۲ ع سے تعبیر ہوگی ۔ اسلئے

$\text{م}\,\text{ف} = \text{ن}\,\text{س} = 2\,\text{ع}$ ، اور دفعہ ماسبق سے $\text{س} + \text{ف} = \text{ع} + 2$

ان مساواتوں سے

$$\text{س} = \frac{4\,\text{م}}{2(\text{م}+\text{ن}) - \text{م}\,\text{ن}} \text{ ، } \text{ع} = \frac{2\,\text{م}\,\text{ن}}{2(\text{م}+\text{ن}) - \text{م}\,\text{ن}}$$

$$\text{ف} = \frac{4\,\text{ن}}{2(\text{م}+\text{ن}) - \text{م}\,\text{ن}}$$

ان جملوں کو مثبت صحیح اعداد ہونا چاہئے اور اس لئے

$2(\text{م}+\text{ن})$ کو م ن سے بڑا ہونا چاہئے ۔ اِس لئے

$\frac{1}{\text{م}} + \frac{1}{\text{ن}}$ بڑا ہونا چاہئے $\frac{1}{2}$ سے

لیکن ن، ۳ سے چھوٹا نہیں ہو سکتا یعنے ۱/ن ، ۱/۳ سے بڑا نہیں ہو سکتا اور اس لئے ۱/م ، ۱/۶ سے بڑا ہونا چاہئے۔ اور چونکہ م کو ایک صحیح عدد ہونا چاہئے اور وہ ۳ سے چھوٹا نہیں ہو سکتا اس لئے م کی قابل قبول قیمتیں صرف ۳، ۴، ۵ ہو سکتی ہیں۔ امتحان کرنے سے یہ معلوم ہوگا کہ م اور ن کی وہ تمام قیمتیں جو سب ضروری شرطوں کو پورا کرتی ہیں حسب ذیل ہیں۔ ہر منتظم کثیر السطوح کا نام اس کے مستوی رخوں کی تعداد سے ماخوذ ہے۔

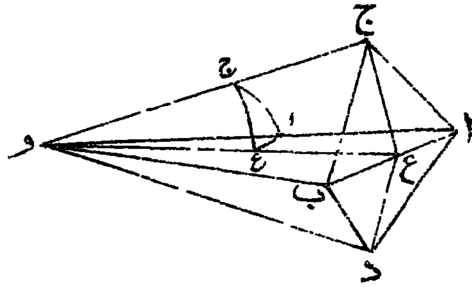
م	ن	س	ع	ف	منتظم کثیر السطوح کا نام
۳	۳	۴	۶	۴	ذوار بعۃ السطوح یا چار سطحی
۴	۳	۸	۱۲	۶	چھ سطحی یا مکعب
۳	۴	۶	۱۲	۸	آٹھ سطحی
۵	۳	۲۰	۳۰	۱۲	بارہ سطحی
۳	۵	۱۲	۳۰	۲۰	بیس سطحی

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اوپر کے ثبوت میں جو چیزیں ثابت ہوئی ہیں وہ کچھ زیادہ ہی ہیں بہ نسبت اُن چیزوں کے جو دعوے میں بیان ہوئی ہیں کیونکہ اس میں یہ تسلیم نہیں کیا گیا ہے کہ رُخ متساوی الاضلاع اور متساوی الزاویہ ہیں اور سب مساوی ہیں۔ دراصل یہ ثابت کردیا گیا ہے کہ پانچ سے زیادہ مجسم نہیں ہو سکتے جن میں سے ہر ایک میں اس کے تمام رُخ اضلاع کی ایک ہی تعداد سے بنتے ہیں اور اس کے تمام مجسم زاویے سطحی زاویوں کی ایک ہی تعداد سے۔

۲۵۶ - کسی کثیر السطوح کے مجسم زاوئے جن مستوی زاویوں سے بنتے ہیں ان سب کا مجموعہ ۲ (س - ۲) ہوتا ہے۔

کیونکہ اگر کثیر السطوح کے کسی رُخ میں ضلعوں کی تعداد م سے تعبیر ہو تو اس رُخ کے داخلہ زاویوں کا مجموعہ (م - ۲) π ہے (اقلیدس حصہ اول، مسئلہ ۳۲ نتیجہ صریح ۱) پس سب رخوں کے کل داخلہ زاویوں کا مجموعہ ∑ (م - ۲) π ہے یعنی ∑ م π - ۲ ف π یعنی ۲ (ع - ف) π یعنی ۲ (س - ۲)۔

۲۵۷ - منتظم کثیر السطوح کے دو متصلہ رخوں کا زاویہ میلان معلوم کرنا۔



فرض کرو کہ دو متصلہ رخوں کا مشترک کنارہ اب ہے اور ج اور د رخوں کے مرکز ہیں۔ اب کو ع پر تنصیف کرو اور ج ع اور د ع کو ملاؤ۔ ج ع اور د ع، اب پر عمود ہونگے اور زاویہ ج ع د ان دو متصلہ رخوں کا زاویہ میلان ہے۔ ہم اس کو خ سے تعبیر کرینگے۔ ج ع اور د ع کی سطح مستوی میں ج و اور د و علی الترتیب ج ع اور د ع پر عمود کھینچو جو و پر ملتے ہیں۔ و کو مرکز مانکر ایک کرہ (۲۱۰)
کھینچو جو و ا، و ج، و ع کو علی الترتیب ا، ج، ع پر قطع کرتا ہے اسلئے

اج ع ایک مثلث کروی بن جاتا ہے - اب چونکہ اب، ج ع اور د ع پر عمود ہے اسلئے وہ مستوی ج ع د پر عمود ہے اس لئے مستوی ا و ب جس میں اب واقع ہے مستوی ج ع د پر عمود ہے۔ پس کروی مثلث کا زاویہ ج ع ا قائمہ ہے۔ فرض کرو کہ کثیر السطوح کے ہر رُخ میں ضلعوں کی تعداد م اور ہر مجسم زاویے کو بنانے والے مستوی زاویوں کی تعداد ن ہے تو زاویہ اج ع = اج ع = $\frac{\pi ۲}{۲ م} = \frac{\pi}{م}$

اور زاویہ ج ا ع 'ن مساوی زاویوں میں سے ایک کا نصف ہے

جو ا کے گرد کرہ پر بنتے ہیں یعنے ج ا ع = $\frac{\pi ۲}{۲ ن} = \frac{\pi}{ن}$ -

اب قائم الزاویہ مثلث ج ا ع سے

جم ج ا ع = جم ج ع جب اج ع

یعنے جم $\frac{\pi}{ن}$ = جم $(\frac{\pi}{۲} - \frac{خ}{۲})$ جب $\frac{\pi}{م}$

اس لئے جب $\frac{خ}{۲} = \frac{\text{جم}\ \frac{\pi}{ن}}{\text{جب}\ \frac{\pi}{م}}$

۲۵۸ - منتظم کثیر السطوح کے اندرونی اور بیرونی کروں کے نصف قطر معلوم کرنا -

فرض کرو کہ کنارہ اب = ا، و ج = ر، اور و ا = ر اس لئے اندرونی کرہ کا نصف قطر ر اور بیرونی کرہ کا نصف قطر ر ہے - اب

ج ع = اع مم اج ع = $\frac{ا}{۲}$ مم $\frac{\pi}{م}$

ر = ج ع مس ج ع و = ج ع مس $\frac{خ}{۲}$ = $\frac{ا}{۲}$ مم $\frac{\pi}{م}$ مس $\frac{خ}{۲}$

نیز   ر = ن جم ا و ج = ن مم ع ج ا مم ع ا ج

= ن مم $\frac{\pi}{م}$ مم $\frac{\pi}{ن}$

اس لئے   ن = ر س $\frac{\pi}{م}$ مس $\frac{\pi}{ن}$ = $\frac{۱}{۲}$ مس $\frac{خ}{۲}$ مس $\frac{\pi}{ن}$

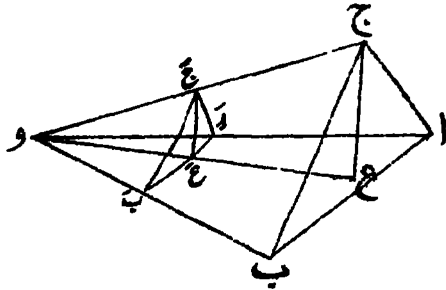
(۲۱۱) **۲۵۹ ۔ منتظم کثیر السطوح کی سطح اور حجم معلوم کرنا ۔**

کثیر السطوح کے ایک رُخ کا رقبہ $\frac{م\,ا^۲}{۴}$ مم $\frac{\pi}{م}$ ہے اور اسلئے

کثیر السطوح کی سطح $\frac{م\,ف\,ا^۲}{۴}$ مم $\frac{\pi}{م}$ ہے ۔

نیز اُس مخروط مضلع کا حجم $\frac{ر}{۳}$ × $\frac{م\,ا^۲}{۴}$ مم $\frac{\pi}{م}$ ہے جس کا قاعدہ کثیر السطوح کا ایک رخ اور جس کا راس و ہے اور اسلئے کثیر السطوح کا حجم $\frac{م\,ف\,ر\,ا^۲}{۱۲}$ مم $\frac{\pi}{م}$ ہے ۔

۲۶۰ ۔ متوازی السطوح کا حجم اس کے کناروں اور اِن کناروں کے ایک دوسرے کے ساتھ میلانوں کی رقوم میں معلوم کرنا ۔



فرض کرو کہ کنارے ہیں و ا = ا، و ب = ب، و ج = ج
اور زاویے میلان ہیں ب و ج = عہ، ج و ا = بہ، ا و ب = جہ۔
مستوی ا و ب پر عمود ج ع کھینچو جو اس کو ع پر ملتا ہے۔ و کو مرکز
مانکر ایک کرہ بناؤ جو و ا، و ب، و ج، و ع کو علی الترتیب اَ، بَ، جَ، عَ
پر قطع کرتا ہے۔

متوازی السطوح کا حجم اس کے قاعدے اور ارتفاع کے حاصل ضرب
کے مساوی ہے۔

یعنے = ا ب جب جہ × ج ع = ا ب ج جب جہ جب جَ وعَ۔ کروی
مثلث جَ اَ عَ راس عَ پر قائمۃ الزاویہ ہے۔ اس لئے

جب جَ عَ = جب جَ اَ جب جَ اَ عَ = جب بہ جب جَ اَ بَ

اور کروی مثلث جَ اَ بَ سے (بموجب دفعہ ۴۵)

جب جَ اَ بَ = √(۱ - جم^{2} عہ - جم^{2} بہ - جم^{2} جہ + ۲ جم عہ جم بہ جم جہ) ÷ (جب بہ جب جہ)

اس لئے متوازی السطوح کا حجم

= ا ب ج √(۱ - جم^{2} عہ - جم^{2} بہ - جم^{2} جہ + ۲ جم عہ جم بہ جم جہ)

(۲۱۲) **۲۶۱ - متوازی السطوح کے وتر کو تین کناروں (جن سے یہ وتر ملتا ہے) اور ان کناروں کے ایک دوسرے کے ساتھ میلانوں کی رقوم میں معلوم کرنا۔**

فرض کرو کہ کنارے ہیں و ا = ا، و ب = ب، و ج = ج اور
میلان ہیں ب و ج = عہ، ج و ا = بہ، ا و ب = جہ، فرض کرو کہ
مطلوبہ وتر و د ہے اور رخ و ا ب کا وتر و ع ہے تو

و د^{2} = و ع^{2} + ع د^{2} + ۲ و ع × ع د جم ج و ع

= اَ² + بَ² + ۲ ا ب جم جہ + جَ² + ۲ ج × و ع جم ج و ع،

و کو مرکز مانکر ایک کرہ بناؤ جو و ا، و ب، و ج، و ع کو علی الترتیب
اَ، بَ، جَ، عَ پر قطع کرے تو بموجب دفعہ ۱۴۳، (۱۱)

جم ج و ع = جم جَ عَ = $\frac{\text{جم جَ بَ جب اَ عَ + جم جَ اَ جب بَ عَ}}{\text{جب اَ بَ}}$

= $\frac{\text{جم عہ جب ا و ع + جم بہ جب ب و ع}}{\text{جب جہ}}$

اسلئے

و د² = اَ² + بَ² + جَ² + ۲ ا ب جم جہ + $\frac{\text{۲ ج × و ع}}{\text{جب جہ}}$ (جم عہ جب ا و ع + جم بہ جب ب و ع)

اور و ع جب ا و ع = ب جب جہ، و ع جب ب و ع = ا جب جہ

اسلئے و د² = اَ² + بَ² + جَ² + ۲ ب ج جم عہ + ۲ ج ا جم بہ + ۲ ا ب جم جہ

۲۶۲ — ذوار بعۃ السطوح کا حجم معلوم کرنا۔

ذوار بعۃ السطوح کا حجم اُس متوازی السطوح کے حجم کا $\frac{1}{6}$ ہوتا ہے جس کا ارتفاع وہی ہو اور جس کا قاعدہ ذوار بعۃ السطوح کے قاعدہ کا دُگنا ہو۔ اس لیئے اگر کنارے اور ان کے میلان دیئے جائیں تو دفعہ ۲۶۰ میں متوازی السطوح کا جو حجم دیا گیا ہے اسکے $\frac{1}{6}$ کو ہم ذوار بعۃ السطوح کا

حجم قرار دیسکتے ہیں۔ ذواربعتہ السطوح کا حجم اس کے چھ کناروں کی رقوم میں بھی معلوم کیا جاسکتا ہے کیونکہ دفعہ ۲۶۰ کی شکل میں فرض کرو کہ ب ج = اَ ج ا = بَ، ا ب = جَ د ا = ا، د ب = ب، د ج = ج تو

$$\text{جم عہ} = \frac{\text{بَ}^2 + \text{جَ}^2 - \text{اَ}^2}{2\,\text{بَ}\,\text{جَ}}\text{،}\quad \text{جم بہ} = \frac{\text{جَ}^2 + \text{اَ}^2 - \text{بَ}^2}{2\,\text{جَ}\,\text{اَ}}$$

$$\text{جم جہ} = \frac{\text{اَ}^2 + \text{بَ}^2 - \text{جَ}^2}{2\,\text{اَ}\,\text{بَ}}$$

اگر ان قیمتوں کو دفعہ ۲۶۰ کے معلومہ حجم میں جم عہ، جم بہ، جم جہ کی بجائے مندرج کیا جائے اور جزو ضربی ا ب ج کی بجائے بدلی ہوئی ترقیم کی بموجب اَ بَ جَ رکھدیا جائے اور پھر اس حجم کا $\frac{1}{6}$ لیا جائے تو ذواربعتہ السطوح کا حجم اس کے چھ کناروں کی رقوم میں حاصل ہو جائے گا۔

اس طرح عمل کرنے سے نتیجہ ذیل حاصل ہوگا جہاں ذواربعتہ السطوح کے حجم کو ح سے تعبیر کیا گیا ہے:-

$$144\,\text{ح}^2 = -\text{ا}^2\text{ب}^2\text{ج}^2$$
$$+\text{ا}^2\text{اَ}^2(\text{ب}^2+\text{ج}^2-\text{ا}^2) + \text{ب}^2\text{بَ}^2(\text{ج}^2+\text{ا}^2-\text{ب}^2) + \text{ج}^2\text{جَ}^2(\text{ا}^2+\text{ب}^2-\text{ج}^2)$$
$$-\text{ا}^2(\text{اَ}^2-\text{بَ}^2)(\text{اَ}^2-\text{جَ}^2) - \text{ب}^2(\text{بَ}^2-\text{جَ}^2)(\text{بَ}^2-\text{اَ}^2)$$
$$-\text{ج}^2(\text{جَ}^2-\text{اَ}^2)(\text{جَ}^2-\text{بَ}^2)$$

اس طرح منتظم ذواربعتہ السطوح کی صورت میں

$$144\,\text{ح}^2 = 2\,\text{ا}^6$$

۲۶۳۔ اگر ذواربعتہ السطوح کے راس کو اس کے قاعدے کے مستوی میں کسی نقطہ پر واقع ہونا فرض کیا جائے تو اس کا حجم معدوم ہو جائیگا۔ اس لئے اگر ہم متذکرہ بالا مساوات کی بائیں جانب کے جملے کو صفر کے مساوی رکھیں تو ہمیں ایسے چھ خطوط مستقیم کے درمیان ربط ملیگا جو ایک مستوی میں کے کسی چار نقطوں کو باہم ملانے سے پیدا ہوتے ہیں۔

یا ہم کارنٹ (Carnot) کا طریقہ اختیار کر سکتے ہیں جسمیں

یہ ربط بالکل جداگانہ طریقہ پر معلوم کیا گیا ہے اور پھر اِس ربط سے ذو اربعۃ السطوح کے حجم کے لئے مندرجہ بالا جملہ اخذ کیا گیا ہے۔ اس طریقہ کو اب ہم بیان کرینگے اور پھر چند دیگر تحقیقاتوں کا بھی ذکر کرینگے جنکو کارنٹ نے بیان کیا ہے۔

۲۶۴ – ایک مستوی میں کوئی چار نقطے لیکر اِن کو چھ خطوط مستقیم سے ملایا گیا ہے۔ اِن خطوط کے طولوں کے درمیان ربط معلوم کرنا مطلوب ہے۔

فرض کرو کہ یہ چار نقطے ا، ب، ج، د ہیں۔ فرض کرو کہ ب ج = رَ، ج ا = بَ، ا ب = جَ، اور د ا = رَ، د ب = بَ، د ج = جَ۔ (۲۱۴)

اگر د، مثلث ا ب ج کے اندر واقع ہے تو زاویوں ب د ج، ج د ا، ا د ب کا مجموعہ چار قائموں کے مساوی ہوگا۔ اِن زاویوں کو طہ، فہ، سہ سے اور اِن کے مجموعہ کو ۲ ثہ سے تعبیر کرو تو جب ثہ = ۰۔

اگر د، مثلث ا ب ج کے باہر واقع ہے تو د پر کے تین زاویوں میں سے ایک باقی دو کے مجموعے کے مساوی ہوگا۔ یعنے مقادیر ثہ - طہ، ثہ - فہ، ثہ - سہ میں سے ایک مقدار معدوم ہو جائے گی۔

اسلئے د خواہ اندر ہو یا باہر

$$\text{۴ جب ثہ جب (ثہ - طہ) جب (ثہ - فہ) جب (ثہ - سہ)} = ۰$$

$$= \text{۱} - \text{جم}^2\text{طہ} - \text{جم}^2\text{فہ} - \text{جم}^2\text{سہ} + \text{۲ جم طہ جم فہ جم سہ}$$

اب $\text{جم طہ} = \dfrac{(\text{بَ}^2 + \text{جَ}^2 - \text{رَ}^2)}{\text{۲ بَ جَ}}$ اور اسی طرح دوسری جیوب التمام کو بیان کیا جا سکتا ہے۔ ان قیمتوں کو نتیجہ بالا میں مندرج کرو تو مطلوبہ ربط مل جائیگا جو اختصار کے بعد شکل ذیل میں رکھا جا سکتا ہے :-

$$۰ = -\text{اَ}^2\text{بَ}^2\text{جَ}^2$$

+ اَ۲ ا۲ (ب۲ + ج۲ − ا۲) + بَ۲ ب۲ (ج۲ + ا۲ − ب۲) + جَ۲ ج۲ (ا۲ + ب۲ − ج۲)
− ا۲ (اَ۲ − بَ۲) (اَ۲ − جَ۲) − بَ۲ (بَ۲ − جَ۲) (بَ۲ − اَ۲)
− جَ۲ (جَ۲ − اَ۲) (جَ۲ − بَ۲)

۲۶۵ – ذوار بعۃ السطوح کا حجم اس کے چھ کناروں کی رقوم میں بیان کرنا۔

فرض کرو کہ مثلث اب ج کے ضلعوں کے طول ا، ب، ج ہیں اور یہ مثلث ذوار بعۃ السطوح کا ایک رخ ہے جس کو ہم قاعدہ کہہ سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ ذوار بعۃ السطوح کے راس کو ا، ب، ج سے ملانیوالے خطوط مستقیم کے طول علی الترتیب اَ، بَ، جَ ہیں۔ فرض کرو کہ راس سے قاعدے پر کے عمود کا طول ع ہے تو عمود کے پائین کو ا، ب، ج سے ملانے والے خطوط مستقیم کے طول علی الترتیب √(اَ۲ − ع۲)، √(بَ۲ − ع۲)، √(جَ۲ − ع۲) ہونگے۔ پس دفعہ ۲۶۴ کا ربط درست ہوگا اگر اس میں اَ کی بجائے √(اَ۲ − ع۲)، بَ کی بجائے √(بَ۲ − ع۲) اور جَ کی بجائے √(جَ۲ − ع۲) درج کیا جائے۔ اسلیئے

ع۲ (۲ ب۲ ج۲ + ۲ ج۲ ا۲ + ۲ ا۲ ب۲ − ا۴ − ب۴ − ج۴) = − ا۲ ب۲ ج۲
+ اَ۲ ا۲ (ب۲ + ج۲ − ا۲) + بَ۲ ب۲ (ج۲ + ا۲ − ب۲) + جَ۲ ج۲ (ا۲ + ب۲ − ج۲)
− اَ۲ (اَ۲ − بَ۲)، (اَ۲ − جَ۲) − بَ۲ (بَ۲ − جَ۲) (بَ۲ − اَ۲)
− جَ۲ (جَ۲ − اَ۲) (جَ۲ − بَ۲)

ع۲ کا سر مثلث اب ج کے رقبہ کے مربع کا ۱۶ گنا ہے۔ اس لئے
(۲۱۵) دائیں طرف کا رکن ۱۴۴ ح۲ ہے جہاں ح سے ذوار بعۃ السطوح کا حجم تعبیر ہوتا ہے۔ پس مطلوبہ جملہ حاصل ہوگیا۔

۲۶۶ – کرہ کی سطح پر کوئی چار نقطے لیکر ان کو بڑے دائروں کی

چھ قوسوں سے ملایا گیا ہے ان قوسوں کے درمیان ربط معلوم کرنا مطلوب ہے۔ (دفعہ ۳۵۲ سے مقابلہ کرو)۔

فرض کرو کہ کرہ کی سطح پر کوئی چار نقطے ا، ب، ج، د ہیں۔ فرض کرو کہ ب ج = عہ، ج ا = یہ، اب = جہ اور د ا = عہَ، د ب = یہَ، د ج = جہَ
دفعہ ۲۶۴ کی طرح

۱ = جم^۲ ب د ج + جم^۲ ج د ا + جم^۲ ا د ب - ۲ جم ب د ج جم ج د ا جم ا د ب

اب جم ب د ج = (جم عہ - جم یہَ جم جہَ) / (جب یہَ جب جہَ) اور اسی طرح دوسری جیوب التمام بیان ہو سکتی ہیں۔ ان قیمتوں کو نتیجہ بالا میں مندرج کرو تو مطلوبہ ربط حاصل ہو جائے گا جو اختصار کے بعد شکل ذیل میں رکھا جا سکتا ہے

۱ = جم^۲ عہ + جم^۲ یہ + جم^۲ جہ + جم^۲ عہَ + جم^۲ یہَ + جم^۲ جہَ
- جم^۲ عہ جم^۲ عہَ - جم^۲ یہ جم^۲ یہَ - جم^۲ جہ جم^۲ جہَ
- ۲ (جم عہ جم یہ جم جہ + جم عہ جم یہَ جم جہَ
+ جم یہ جم جہَ جم عہَ + جم جہ جم عہَ جم یہَ)
+ ۲ (جم یہ جم جہ جم یہَ جم جہَ + جم جہ جم عہ جم جہَ جم عہَ
+ جم عہ جم یہ جم عہَ جم یہَ)

۲۶۷۔ ذوار بعۃ السطوح کے حائط کرہ کا نصف قطر معلوم کرنا۔

دفعہ ۲۶۵ کے مطابق ذوار بعۃ السطوح کے کناروں کو تعبیر کرو۔ فرض کرو کہ ذوار بعۃ السطوح کا بیرونی کرہ کھینچ لیا گیا ہے۔ ذوار بعۃ السطوح کے راسوں کو ملانے والی بڑے دائروں کی قوسیں کرہ پر کھینچو۔ ان چھ قوسوں کی جیوب التمام میں وہ ربط صادق آئے گا جو دفعہ ۲۶۶ میں بیان ہوا ہے۔
فرض کرو کہ کرہ کا نصف قطر ر ہے تو

جم عہ = ۱ - ۲ جب^۲ (عہ/۲) = ۱ - ۲ (ا/۲ر)^۲ = ۱ - ا^۲/۲ر^۲

(۲۱۶) اور دوسری جیوب التمام بھی اسی طرح بیان ہو سکتی ہیں۔ اِن قیمتوں کو دفعہ ۲۶۶ کے نتیجہ میں مندرج کرو تو اختصار کے بعد ہمیں دفعہ ۲۶۵ کی مدد سے ربط ذیل حاصل ہوگا:۔

۴ × ۱۴۴ حؔ^۲ رؔ^۲

= ۲ ب^۲ ج^۲ بؔ^۲ جؔ^۲ + ۲ ج^۲ ا^۲ جؔ^۲ اؔ^۲ + ۲ ا^۲ ب^۲ اؔ^۲ بؔ^۲ − ا^۴ اؔ^۴ − ب^۴ بؔ^۴

− ج^۴ جؔ^۴

بائیں طرف کا رکن بھی اجزائے ضربی میں تحویل ہو سکتا ہے جیسا کہ ہم نے مثلث کے رقبہ کے جملہ کو اجزائے ضربی میں تحویل کیا تھا۔ فرض کرو کہ ا اؔ + ب بؔ + ج جؔ = ۲ ثہ تو

۳۶ حؔ^۲ رؔ^۲ = ثہ (ثہ − ا اؔ) (ثہ − ب بؔ) (ثہ − ج جؔ)

امثلہ نمبری (۱۷)

۱۔ اگر خ سے ایک منتظم کثیر السطوح کے دو متصلہ رخوں کا میلان تعبیر ہو تو ثابت کرو کہ جم خ = ⅓ ذوار بعتہ السطوح کی صورت میں، = ۰ مکعب کی صورت میں، = − ⅓ آٹھ سطحی کی صورت میں، = − ⅕ √۵ بارہ سطحی کی صورت میں، اور = − ⅓ √۵ بیس سطحی کی صورت میں۔

۲۔ دفعہ ۲۵۷ کی ترقیم کی بموجب ثابت کرو کہ اُس کرہ کا نصف قطر ½ ا رصم ¼ صم ½ خ ہے جو منتظم کثیر السطوح کے ایک رخ کو اور باقی سب متصلہ محدودہ رخوں کو مس کرتا ہے۔

۳۔ ایک کرہ منتظم ذوار بعتہ السطوح کے ایک رخ کو اور دیگر تین محدودہ رخوں کو مس کرتا ہے۔ اس کا نصف قطر معلوم کرو۔

۴۔ اگر ایک منتظم ذوار بعتہ السطوح کے اندرونی و بیرونی کروں کے نصف قطر ا اور ب ہوں تو ثابت کرو کہ ب = ۳ ا۔

۵۔ اگر ایک منتظم ذوار بعتہ السطوح کے اندرونی کرہ کا نصف قطر ا ہو اور اسکے کناروں کو مس کرنیوالے کرہ کا نصف قطر ر ہو تو ثابت کرو کہ ر^۲ = ۳ ا^۲۔

۶۔ اگر ایک منتظم ذو اربعۃ السطوح کے اندرونی کرہ کا نصف قطر ر ہو اور ر٘
اُس کرہ کا نصف قطر ہو جو ایک رخ کو اور دو سرے ممدودہ رخوں کو مس کرتا ہے
تو ثابت کرو کہ ر٘ = ۲ ر ۔

۷۔ اگر ایک دئے ہوئے کرہ کے گرد ایک مکعب اور ایک منتظم آٹھ سطحی بنائے جائیں تو ان کثیر السطوحوں کا بیرونی کرہ ایک ہی ہوگا اور اس کے برعکس۔

۸۔ اگر ایک دئے ہوئے کرہ کے گرد ایک منتظم بارہ سطحی اور ایک منتظم بیس سطحی بنائے جائیں تو ان کثیر السطوحوں کا بیرونی کرہ ایک ہی ہوگا اور اس کے برعکس۔

۹۔ ایک کرہ کے گرد ایک منتظم ذو اربعۃ السطوح اور ایک منتظم آٹھ سطحی بنائے گئے ہیں۔ ان کے اندرونی کروں کے نصف قطروں کا مقابلہ کرو۔ (۲۱۸)

۱۰۔ متوازی السطوح کے چاروں وتروں کے مربعوں کا مجموعہ، کناروں کے مربعوں کے مجموعہ کے چار گنے کے مساوی ہوتا ہے۔

۱۱۔ اگر کسی متوازی السطوح کے راسوں کو مرکز مانکر مساوی کرے بنائے جائیں تو متوازی السطوح کے مقطوعہ حصوں کا مجموعہ ان میں سے ایک کرہ کے حجم کے مساوی ہوگا۔

۱۲۔ ایک منتظم آٹھ سطحی ایک مکعب میں بنایا گیا ہے اس طور پر کہ آٹھ سطحی کے راس مکعب کے رخوں کے مرکزوں پر واقع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مکعب کا حجم آٹھ سطحی کے حجم کا چھ گنا ہے۔

۱۳۔ یہ ممکن نہیں کہ کسی دی ہوئی فضا کو ایک ہی قسم کے منتظم کثیر السطوحوں سے پر کیا جا سکے سوائے مکعبوں کے۔ لیکن ذو اربعۃ السطوحوں اور آٹھ سطحی مجسموں کی مدد سے ایسا کیا جا سکتا ہے اگر ان کے رخ مساوی ہوں اور قبل الذکر کی تعداد موخر الذکر کی تعداد سے دگنی ہو۔

۱۴۔ نصف قطر ف کے کرہ کی سطح پر ایک کروی مثلث بنایا گیا ہے۔ اس کے راسوں کو ملایا گیا ہے اور پھر ان کو خطوط مستقیم کے ذریعہ کرہ کے مرکز سے ملایا گیا ہے اس طرح ایک مخروط مضلع حاصل کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس مخروط مضلع کا حجم ہے

$$\frac{۱}{۳}\ غ\ ر^{۳}\ \sqrt{س\ ر\ س\ ر_{۱}\ س\ ر_{۲}\ س\ ر_{۳}}$$

جہاں مثلث کے اندرونی اور جانبی دائرہ کے نصف قطر ر، ر۱، ر۲، ر۳ ہیں۔

۱۵۔ نصف قطر ر کے ایک کرہ میں ایک منتظم ذو اربعۃ السطوح بنایا گیا ہے۔ اسکے راسوں کو قطب مانکر کرہ پر چار چھوٹے دائرے کھینچے گئے اس طور پر کہ ہر دائرہ باقی تین دائروں کو مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اُس سطح کا رقبہ جو ہر دائرہ سے محدود ہے $۲\pi ر^{۲}\left(۱ - \frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)$ ہے۔

۱۶۔ اگر ایک کروی مثلث ا ب ج کے اندر کوئی نقطہ و ہو تو کسی دو ضلعوں کی جیوب اور ان کے درمیانی زاویہ کی جیب کا حاصل ضرب

= جب ا و جب ب و جب ا ج ر {مم ا و جب ب و ج
+ مم ب و جب ا ج و ا + مم ج و جب ا و ب}

(۲۱۸)

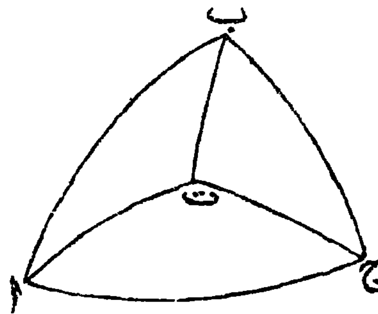
سترھواں باب

کرہ کی سطح پر ثابت نقطوں تک کھنچی ہوئی قوسیں

۲۶۸ - اس باب میں ہم چند مسئلے ثابت کرینگے جو ایسی قوسوں سے متعلق ہیں جو کرہ کی سطح پر کے کسی نقطہ سے سطح پر کے چند دوسرے ثابت نقطوں تک کھینچی گئی ہوں -

۲۶۹ - اب ج ایک کروی مثلث ہے جس کے سب ضلع ربعات ہیں اور اس لئے اس کے سب زاوئے قائمہ ہیں - کرہ کی سطح پر کوئی نقطہ ت ہے ثابت کرو کہ

جم^۲ ت ا + جم^۲ ت ب + جم^۲ ت ج = ۱



دفعہ ۴۴ سے

جم ت ا = جم اب جم ت اب + جب اب جب ت ب جم ت ب ا

= جب ت ب جم ت ب ا

(۲۱۹) اسی طرح جم ت ج = جب ت ب جم ت ب ج = جب ت ا ب جب ت ب ا

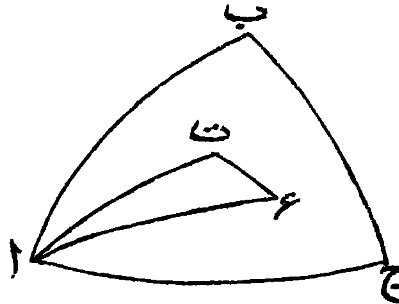
مربع لو اور جمع کرو تو

جم ت ا + جم ت ج = جب ت ب = ۱ - جم ت ب

اس لئے جم ت ا + جم ت ب + جم ت ج = ۱

۲۷۰ - ا ب ج ایک کروی مثلث ہے جس کے سب ضلع ربعات ہیں اور اس لئے اس کے سب زاوئے قائمہ ہیں - کرہ کی سطح پر ت اور ع کوئی نقطے ہیں - ثابت کرو کہ

جم ت ع = جم ت ا جم ع ا + جم ت ب جم ع ب + جم ت ج جم ع ج



دفعہ ۲۱۴ سے

جم ت ع = جم ت ا جم ع ا + جب ت ا جب ع ا جم ت ا ع

اب جم ت ا ع = جم (ب ا ع - ب ا ت)

= جم ب ا ع جم ب ا ت + جب ب ا ع جب ب ا ت

= جم ب ا ع جم ب ا ت + جم ج ا ع جم ج ا ت

اس لئے جم ت ع = جم ت ا جم ع ا

+ جب ت ا جب ع ا (جم ب ا ع جم ب ا ت

+ جم ج ا ع جم ج ا ت)

اور جم ت ب = جب ت ا جم ب ا ت

جم ع ب = جب ع ا جم ب ا ع

جم ت ج = جب ت ا جم ج ا ت

جم ع ج = جب ع ا جم ج ا ع

اسلئے جم ت ع = جم ت ا جم ع ا + جم ت ب جم ع ب + جم ت ج جم ع ج

(۲۲۰) ۱۷۲ — اب یہ ثابت کرنا طالب علم کا کام ہے کہ ان دو دفعات ماسبق کے ضابطے ت اور ع کے تمام مقامات کے لیئے درست ہیں خواہ یہ نقطے مثلث ا ب ج کے اندر واقع ہوں یا باہر۔ شکلوں کی تمام ترمیموں میں ثبوت کا ڈھنگ بالکل وہی ہوگا جو اوپر بیان ہوا ہے یہ ضابطے علم ہندسہ تحلیلی (سہ بعدی) میں اکثر استعمال ہوتے ہیں اور اس مضمون کی کتابوں میں انکا ثبوت بھی دیا جاتا ہے ہم نے ان کو یہاں اس وجہ سے بیان کیا ہے کہ علم مثلث کروی میں بھی ان سے کام پڑے گا اور فی الواقع اب ہم چند اہم نتیجوں کے حاصل کرنے میں انکو استعمال کرینگے۔

۱۷۲ — فرض کرو کہ کرہ کی سطح پر ثابت نقطوں کی کوئی تعداد ہے۔ ان کو ھ، ھ، ھ .... سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ کرہ کی سطح پر کوئی نقطہ ت ہے۔ اب ہم ت کو ان ثابت نقطوں سے ملانے والی قوسوں کی جیوب التمام کے مجموعہ کے لئے ایک جملہ دریافت کرینگے۔ اس مجموعہ کو ح سے تعبیر کرو، اس طرح

ح = جم ت ھ + جم ت ھ + جم ت ھ + ...

کرہ کی سطح پر ایک ثابت کروی مثلث ا ب ج لو جس کے سب ضلع ربعات ہوں اور اس لئے تمام زاویے قائمہ۔

فرض کرو کہ ت کو ا، ب، ج سے ملانے والی قوسوں کی جیوب التمام علی الترتیب ل، م، ن سے تعبیر ہوتی ہیں۔ فرض کرو کہ ل، م، ن، ایسی قوسوں کی جیوب التمام ہیں جو ھ کو علی الترتیب ا، ب، ج سے

ملاتی ہیں۔ اسی طرح کی ترقیم ھ۱، ھ۲، ...... کے لحاظ سے استعمال کرو۔

اب دفعہ ۲۷۰ سے

$$ع = ل_1\,لہ + م_1\,مہ + ن_1\,نہ + ل_2\,لہ + م_2\,مہ + ن_2\,نہ + \ldots\ldots$$
$$= پ\,لہ + ق\,مہ + ی\,نہ$$

جہاں $پ = ل_1 + ل_2 + ل_3 + \ldots$، $ق = م_1 + م_2 + م_3 + \ldots$، $ی = ن_1 + ن_2 + ن_3 \ldots\ldots$

۲۷۳ — یہ دیکھ لیا جائے کہ پ وہ قیمت ہے جو ع اختیار کرتا ہے جبکہ ت، ا پر منطبق ہوتا ہے، ق وہ قیمت ہے جو ع اختیار کرتا ہے جبکہ ت، ب پر منطبق ہوتا ہے اور ی وہ قیمت ہے جو ع اختیار کرتا ہے جبکہ ت، ج پر منطبق ہوتا ہے۔

پس نتیجہ بالا، ع کی عام قیمت کو ایسی قوسوں کی جیوب التمام کی (۲۲۱)
رقوم میں بیان کرتا ہے جو ت کو علی الترتیب ثابت نقطوں ا، ب، ج سے ملاتی ہیں اور نیز ع کی اُن مخصوص قیمتوں کی رقوم میں بھی جو اِن نقطوں کے متناظر ہیں۔

۲۷۴ — اب ہم دفعہ ۲۷۲ کے نتیجہ کو تسہیل کرینگے۔

فرض کرو کہ $گ = \sqrt{پ^2 + ق^2 + ی^2}$

اور فرض کرو کہ عہ، بہ، جہ تین قوسیں ہیں جو مساواتوں

$$جم\,عہ = \frac{پ}{گ}،\quad جم\,بہ = \frac{ق}{گ}،\quad جم\,جہ = \frac{ی}{گ}$$

سے متعین ہوئی ہیں تو

$$ع = گ\,(لہ\,جم\,عہ + مہ\,جم\,بہ + نہ\,جم\,جہ)$$

اب چونکہ $جم^2\,عہ + جم^2\,بہ + جم^2\,جہ = 1$ اس لئے یہ ظاہر ہے کہ کرہ کی سطح پر کوئی نقطہ ہوگا ایسا کہ عہ، بہ، جہ وہ قوسیں ہیں جو اس کو علی الترتیب ا، ب، ج سے ملاتی ہیں۔ اس نقطہ کو ع سے تعبیر کرو تو بموجب دفعہ ۲۷۰

جم ت ع = لہ جم عہ + مہ جم یہ + نہ جم جہ

اور آخر الامر

ج = گ جم ت ع

اس طرح ت کا خواہ کوئی محل ہو اُن قوسوں کی جیوب التمام کا مجموعہ جو ت کو ثابت نقطوں سے ملاتی ہیں ایسے بدلتا ہے جیسے اُس تنہا قوس کی جیب التمام جو ت کو کسی خاص ثابت نقطے ع سے ملاتی ہے۔

ہم گ کو مثبت یا منفی لے سکتے ہیں لیکن اسکو مثبت فرض کرنے میں سہولت ہے۔

۲۷۵ — ایک منتظم کثیر السطوح کے گرد ایک کرہ بنایا گیا ہے اور کرہ کی سطح پر کے کسی نقطہ سے کثیر السطوح کے مجسم زاویوں تک قوسیں کھینچی گئی ہیں ثابت کرو کہ ان قوسوں کی جیوب التمام کا مجموعہ صفر ہے۔

دفعہ ماسبق سے ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر گ صفر نہ ہو تو ت کا ایک محل ایسا ہے جس سے ج کی بڑی سے بڑی قیمت حاصل ہوتی ہے یعنی جب 'ت' ع پر منطبق ہوتا ہے لیکن منتظم کثیر السطوح کے تشاکل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ت کے ایسے محل ایک سے زیادہ ہوتے چاہئیں جن سے ج کی ایک ہی قیمت حاصل ہو۔ مثلاً اگر ہم ایک منتظم ذو اربعۃ السطوح لیں تو چونکہ اس کے چار رخ ہیں اس لئے کم از کم ت کے تین اور محل ہو سکتے جو کسی مقررہ مقام سے متشاکل ہونگے۔

پس گ کو صفر ہونا چاہئے، اور اس طرح اُن قوسوں کی جیوب التمام کا مجموعہ ت کے تمام مقامات کے لئے صفر ہے جو ت کو منتظم کثیر السطوح کے مجسم زاویوں سے ملاتی ہیں۔

۲۷۶ — اب چونکہ گ = ۰ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ پ، ق، ر میں سے ہر ایک صفر ہونا چاہئے۔ یہ درحقیقت دفعہ ۲۷۵ کے عام نتیجہ کی خاص خاص

صورتیں ایسی ہیں۔ دیکھو دفعہ ۲۷۳ ۔

۲۷۷ — دفعہ ۲۷۵ میں جو نتیجہ حاصل ہوا ہے وہ بعض دیگر صورتوں میں بھی صادق آتا ہے۔ مثلاً فرض کرو کہ ایک مستطیلی متوازی السطوح کرہ کے اندر بنایا گیا ہے تو ان قوسوں کی جیوب التمام کا مجموعہ صفر ہے جو کرہ پر کے کسی نقطہ کو متوازی السطوح کے مجسم زاویوں سے ملاتی ہیں۔ کیونکہ یہاں یہ بات ظاہر ہے کہ ہشتہ ت کا ایک اور مقام ایسا ہونا چاہئے جو کسی مقررہ مقام کے متشاکل ہو۔ اس طرح دفعہ ۲۷۵ کے استدلال کی بموجب گ = ہونا چاہئے۔

۲۷۸ — فرض کرو کہ کرہ کی سطح پر ثابت نقطوں کی کوئی تعداد ہے۔ ان کو ھ۱، ھ۲، ...... سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ کرہ کی سطح پر کوئی نقطہ ت ہے۔ اب ہم ت کو ان ثابت نقطوں سے ملانے والی قوسوں کی جیوب التمام کے مربعوں کے مجموعہ کے لئے ایک اہم جملہ دریافت کریں گے۔
اس مجموعہ کو ع سے تعبیر کرو، اس طرح

$$\text{ع} = \text{جم}^{2}\,\text{ت ھ}_{1} + \text{جم}^{2}\,\text{ت ھ}_{2} + \ldots\ldots$$

کرہ کی سطح پر ایک ثابت کروی مثلث ا ب ج لو جس کے تمام ضلع ربعات ہوں اور اس لئے تمام زاویے قائمہ۔

فرض کرو کہ ت کو علی الترتیب ا، ب، ج سے ملانے والی قوسوں کی جیوب التمام لہ، مہ، نہ ہیں۔ فرض کرو کہ ل۱، م۱، ن۱ ایسی قوسوں کی جیوب التمام ہیں جو ھ۱ کو علی الترتیب ا، ب، ج سے ملاتی ہیں۔ اسی طرح کی ترقیم ھ۲، ھ۳ ...... کے لحاظ سے استعمال کرو۔

اب دفعہ ۲۷۰ سے (۴۴۳)

$$\text{ع} = (\text{ل}_{1}\,\text{لہ} + \text{م}_{1}\,\text{مہ} + \text{ن}_{1}\,\text{نہ})^{2} + (\text{ل}_{2}\,\text{لہ} + \text{م}_{2}\,\text{مہ} + \text{ن}_{2}\,\text{نہ})^{2} + \ldots\ldots$$

ہر مربع کو پھیلاؤ اور رقموں کو ترتیب دو۔ اس طرح

$$\text{ع} = \text{پ لہ}^{2} + \text{ق مہ}^{2} + \text{ر نہ}^{2} + ۲\,\text{پ مہ نہ} + ۲\,\text{ق نہ لہ} + ۲\,\text{ر لہ مہ}$$

جہاں ﭗ = ل۱۲ + ل۲۲ + ل۳۲ + ... اور ﭗ = م۱ن۱ + م۲ن۲ + م۳ن۳ + ...

اسی طرح ق اور ق، ر اور ر کے لئے متناظر جملے -

ہم ثابت کرینگے کہ مثلث ا ب ج کا ایک محل ایسا ہے جسکے لئے ﭗ، ق اور ر معدوم ہوجاتے ہیں -

کیونکہ فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کو ایک نئے مقام اَ بَ جَ پر منتقل کیا گیا ہے اور فرض کرو کہ قوسوں ت اَ، ت بَ، ت جَ کی جیوب التمام لَہ، مَہ، نَہ ہیں تو

لَہ = لہ جم ا اَ + مہ جم ب اَ + نہ جم ج اَ

اور اسی طرح مَہ اور نَہ کے لئے جملے - اس لئے لَہ، مَہ، نَہ خطی تفاعل ہیں لہ، مہ، نہ کے اور مزید برین

لَہ۲ + مَہ۲ + نَہ۲ = ا = لہ۲ + مہ۲ + نہ۲

اب جبر و مقابلہ کے ایک مشہور مسئلہ[۱] کی بموجب ایک خطی ابدال کا معلوم کرنا ہمیشہ ممکن ہے جس سے یہ دو دو درجی جملے ح اور لہ۲ + مہ۲ + نہ۲ ایک ساتھ اشکال ذیل میں تحویل ہو جائینگی :-

ح = پا لَہ۲ + قا مَہ۲ + ضا نَہ۲

لہ۲ + مہ۲ + نہ۲ = لَہ۲ + مَہ۲ + نَہ۲

مستقلات پا، قا، ضا اس کعبی مساوات

[۱] کوشی (۱۸۲۹ء) - Weierstrass نے Berliner Monatsberichte میں اُس صورت پر بحث کی ہے جب کہ کعبی کی اصلیں مساوی ہوں - اس مسئلہ پر عام فہم بحث مسٹر ٹی - جی - آئی - اے برامونچ نے کوارٹرلی میگزین آف میتھامیٹکس سنہ ۱۹۰۱ء میں کی ہے -

$$\begin{vmatrix} \text{پ} - \text{لا} & \text{ر} & \text{ق} \\ \text{ر} & \text{ق} - \text{لا} & \text{پ} \\ \text{ق} & \text{پ} & \text{ر} - \text{لا} \end{vmatrix} = ۰$$

کی اصلیں ہیں اور اصلوں پا، قا، ضا میں سے کسی دو یا تین کے مساوی ہونے سے نتیجہ پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ مثلث ا ب ج کا ایک محل ایسا ہونا چاہئے کہ ت کے ہر مقام کے لئے

ع = پا لہ^۲ + قا مہ^۲ + ضا نہ^۲

۲۷۹ — دفعہ ۲۷۳ میں جو باتیں بیان ہوئیں وہ دفعہ گذشتہ کے نتیجہ پر بھی قابل (۲۲۴) اطلاق ہیں۔

۲۸۰ — مستقل پا، قا، ضا میں سے فرض کرو کہ پا باقی دو مستقلوں سے چھوٹا نہیں ہے اور ضا باقی دو مستقلوں سے بڑا نہیں ہے۔ تو یہ بہ آسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ پا بڑی سے بڑی قیمت ہے جو ع اختیار کر سکتا ہے اور ضا چھوٹی سے چھوٹی قیمت۔

کیونکہ بموجب دفعہ ۲۶۹

لہ^۲ + مہ^۲ + نہ^۲ = ۱

اس لئے ع = پا (۱ - مہ^۲ - نہ^۲) + قا مہ^۲ + ضا نہ^۲

= پا - (پا - قا) مہ^۲ - (پا - ضا) نہ^۲

اور ع = پا لہ^۲ + قا مہ^۲ + ضا (۱ - لہ^۲ - مہ^۲)

= ضا + (پا - ضا) لہ^۲ + (قا - ضا) مہ^۲

اب بموجب فرض پا - قا، پا - ضا، قا - ضا میں سے کوئی بھی منفی نہیں ہو سکتا اس لئے ع، پا سے بڑا یا ضا سے چھوٹا نہیں ہو سکتا۔

۲۸۱ — ایک منتظم کثیر السطوح کے گرد ایک کرہ بنایا گیا ہے۔ کرہ کی سطح پر کے کسی نقطہ سے کثیر السطوح کے مجسم زاویوں تک قوسیں کھینچی گئی ہیں۔ ان قوسوں کی جیوب التمام کے مربعوں کا مجموعہ معلوم کرنا مطلوب ہے۔

دفعہ ۲۷۸ کی ترقسیم کی بموجب

$$ح = پا\,لہ^{2} + قا\,مہ^{2} + ضا\,نہ^{2}$$

موجودہ صورت میں ہم ثابت کرینگے کہ پا، قا اور ضا سب مساوی ہونے چاہئیں۔ کیونکہ اگر وہ مساوی نہ ہوں تو انہیں سے ایک کو باقی دوسروں سے بڑا ہونا چاہیئے یا ان میں سے ایک کو باقی دوسروں سے چھوٹا ہونا چاہیئے۔ ممکن ہو تو فرض کرو کہ پہلی صورت موجود ہے اور پا، قا سے بڑا اور ضا سے بڑا ہے تو مساوات

$$ح = پا - (پا - قا)\,مہ^{2} - (پا - ضا)\,نہ^{2}$$

سے ظاہر ہے کہ ح ہمیشہ پا سے چھوٹا ہوگا سوائے اُس صورت کے جب مہ = ٠ اور نہ = ٠ یعنی ح ہمیشہ پا سے چھوٹا ہوگا سوائے اُس صورت کے جب ت، ا پر منطبق ہو یا اس نقطہ پر جو ا کے متقاطر ہے۔ لیکن منتظم کثیر السطوح کے تشاکل سے یہ ظاہر ہے کہ ہمیشہ ت کے (۲۲۵) دو سے زیادہ ایسے محل ہونے چاہئیں جن سے ح کی ایک ہی قیمت حاصل ہو۔ مثلاً اگر ہم منتظم ذوار بعتہ السطوح لیں تو چونکہ اس کے چار رخ ہوتے ہیں اس لئے ت کے کم از کم تین دوسرے محل ایسے ہونگے جو کسی مجوزہ محل کے متشاکل ہونگے۔ اسلئے پا، قا سے اور ضا سے بڑا نہیں ہو سکتا۔

اسی طرح ہم یہ بھی ثابت کر سکتے ہیں کہ پا، قا، ضا میں سے کوئی بھی باقی دو میں سے ہر ایک سے چھوٹا نہیں ہو سکتا۔

اس لئے پا = قا = ضا اور اس لئے بموجب دفعہ ۲۶۹، ت کے ہر مقام کے لئے ح = پا۔

اب چونکہ پا = قا = ضا اس لئے انہیں سے ہر ایک $= \frac{۱}{۳}$ (پا + قا + ضا)

$$= \frac{۱}{۳}\left(ل_{۱}^{۲} + م_{۱}^{۲} + ن_{۱}^{۲} + ل_{۲}^{۲} + م_{۲}^{۲} + ن_{۲}^{۲} + \cdots\right)$$

$$= \frac{س}{۳}$$ ، بموجب دفعہ ۲۶۹

جہاں منتظم کثیر السطوح کے زاویوں کی تعداد س ہے۔

اس لئے ان قوسوں کی جیوب التمام کے مربعوں کا مجموعہ جو کرہ کی سطح پر کے کسی نقطہ کو منتظم کثیر السطوح کے مجسم زاویوں سے ملاتی ہیں مجسم زاویوں کی تعداد کا ایک ثلث ہے۔

۲۸۲ — چونکہ دفعہ ماسبق میں پا = قا = ضا اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب دفعہ ۲۷۸ کے ثابت نقطے ایک منتظم کثیر السطوح کے مجسم زاوئے ہو جائیں تو مثلث اب ج کے کسی محل کے لئے پ = ق = ر = ۰

کیونکہ کروی مثلث اب ج کا کوئی محل لینے سے

ع = پ ل۲ + ق مہ۲ + ر نہ۲ + ۲ پ مہ نہ + ۲ ق نہ ل + ۲ ر ل مہ

تب ا پر مہ = ۰ اور نہ = ۰ اس لئے اس صورت میں پ ع کی قیمت ہے۔ اسی طرح ق اور ر علی الترتیب ب اور ج پر ع کی قیمتیں ہیں لیکن دفعہ ۲۸۱ کی رو سے ع کی قیمت ایک ہی ہوتی ہے خواہ ت کا محل کہیں ہو۔ اس طرح ع = پ = ق = ر اور اس لئے

پ = پ (ل۲ + مہ۲ + نہ۲) + ۲ پ مہ نہ + ۲ ق نہ ل + ۲ ر ل مہ

اسلئے ۰ = ۲ پ مہ نہ + ۲ ق نہ ل + ۲ ر ل مہ

پس یہ ربط ت کے ہر مقام کے لئے صادق آتا ہے۔ (۲۲۶)

فرض کرو کہ ت اس بڑے دائرہ کے کسی نقطہ پر واقع ہے جس کا قطب ا ہے۔ اس صورت میں ل = ۰ اس لئے مہ اور نہ کی تمام قیمتوں کیلئے پ مہ نہ = ۰ اور اس لئے پ = ۰۔ اسی طرح ق = ۰ ، ر = ۰ [1]

اگر جبر و مقابلہ کی زبان میں بیان کیا جائے تو نتیجہ محصلا اس مسئلہ کے

---

[1] وبر وسٹر اس — Loc. cit — برنسائڈ اور پیانٹن کی تصنیف "مساواتوں کا نظریہ" نیز یہاں باب اشلہ ۳۹ اور ۴۰۔

معادل ہو جاتا ہے کہ اگر مساوات

پ - لا	ر	ق	
ر	ق - لا	پ	= ۰
ق	پ	ر - لا	

کی تین اصلیں مساوی ہوں تو پ = ق = ر اور پَ = ۰، قَ = ۰، رَ = ۰

۲۸۳ ـ فرض کرو کہ کرہ کی سطح پر ثابت نقطوں کی کوئی تعداد ہے۔ انکو ھ۱، ھ۲، ھ۳ ..... سے تعبیر کرو۔ کرہ کی سطح پر کے کسی دو نقطوں ت اور ع سے ان ثابت نقطوں تک قوسیں کھینچی گئی ہیں۔ ان قوسوں کی تناظر جیوب التمام کے حاصل ضربوں کا مجموعہ دریافت کرنا مطلوب ہے یعنے

جم ت ھ۱ جم ع ھ۱ + جم ت ھ۲ جم ع ھ۲ + ...

دفعہ ۲۷۸ کے شروع میں جو ترقیم اختیار کی گئی ہے اسی کو برقرار رکھو اور فرض کرو کہ ع کو بالترتیب ا، ب، ج سے ملانے والی قوسوں کی جیوب التمام لَ، مَ، نَ ہیں۔ اب دفعہ ۲۷۰ سے

جم ت ھ۱ جم ع ھ۱ = (ل ل۱ + م م۱ + ن ن۱) (لَ ل۱ + مَ م۱ + نَ ن۱)

= ل لَ ل۱² + م مَ م۱² + ن نَ ن۱² + (م نَ + ن مَ) م۱ ن۱

+ (ن لَ + ل نَ) ن۱ ل۱ + (ل مَ + م لَ) ل۱ م۱

اسی طرح کے جملے جم ت ھ۲ جم ع ھ۲، جم ت ھ۳ جم ع ھ۳ ..... کیلئے
پس دفعہ ۲۷۸ کی ترقیم کی بموجب مطلوبہ مجموعہ ہے

ل لَ پ + م مَ ق + ن نَ ر + (م نَ + ن مَ) پ

+ (ن لَ + ل نَ) ق + (ل مَ + م لَ) ر

اب مثلث ا ب ج کے محل کو مناسب طور پر منتخب کر لینے سے پ، ق اور ر میں سے ہر ایک صفر ہوتا ہے حسب دفعہ ۲۷۸ اور اس لئے مطلوبہ مجموعہ ہو جاتا ہے

لہ لَہ پاؔ + مہ مَہ قاؔ + نہ نَہ ضاؔ

۲۸۴ — دفعہ ۲۷۸ میں جو نتیجہ حاصل ہوا ہے وہ مذکورہ بالا نتیجہ کی خاص صورت خیال کیا جا سکتا ہے یعنے وہ صورت جبیں ت اور ع منطبق ہوتے ہیں ۔ (۲۲۷)

۲۸۵ — ایک منتظم کثیر السطوح کے گرد ایک کرہ بنایا گیا ہے ۔ کرہ کی سطح پر کے کسی دو نقطوں سے کثیر السطوح کے مجسم زاویوں تک قوسیں کھینچی گئی ہیں ۔ تناظر جیوب التمام کے حاصل ضربوں کا مجموعہ مطلوب ہے ۔

دفعہ ۲۸۳ کی ترقیم کی بموجب ہم دیکھتے ہیں کہ مطلوبہ مجموعہ

لہ لَہ پاؔ + مہ مَہ قاؔ + نہ نَہ ضاؔ

ہے لیکن یہاں پاؔ = قاؔ = ضاؔ = $\frac{\text{س}}{۳}$ بموجب دفعہ ۲۸۱ ،

اس طرح مطلوبہ مجموعہ = $\frac{\text{س}}{۳}$ (لہ لَہ + مہ مَہ + نہ نَہ)

= $\frac{\text{س}}{۳}$ جم ت ع

اس لئے جیوب التمام کے حاصل ضربوں کا مجموعہ ت ع کی جیب التمام اور منتظم کثیر السطوح کے مجسم زاویوں کی تعداد کے ایک ثلث کے حاصل ضرب کے مساوی ہے ۔

۲۸۶ — دفعہ ۲۸۱ میں جو نتیجہ حاصل ہوا ہے وہ مندرجہ بالا نتیجہ کی خاص صورت خیال کیا جا سکتا ہے یعنے وہ صورت جبیں ت اور ع منطبق ہوتے ہیں ۔

۲۸۷ — اگر ت ع ایک ربع ہو تو جم ت ع صفر ہے اور دفعہ ۲۸۵ کی جیوب التمام کے حاصل ضربوں کا مجموعہ صفر ہے ۔ نتائج پ = ۰ ، ق = ۰ ، ر = ۰ اس مخصوص صورت کی خاص خاص مثالیں ہیں ۔

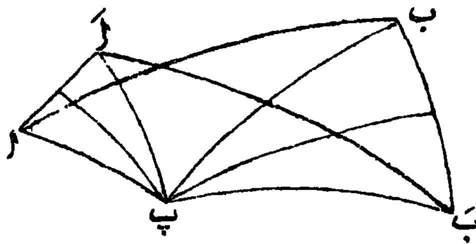
---

(۲۲۸)

اٹھارہواں باب

متفرق مسائل

۲۸۸ – اگر اب اور اَبَ کوئی دو مساوی قوسیں ہوں اور قوسیں اِاَ اور ب بَ، پ پر ملنے والی قوسوں سے علی القوائم تنصیف ہوں تو مثلثات اپ ب، اَپ بَ متماثلاً ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔[1]



چونکہ پ ا = پ اَ اور پ ب = پ بَ اسلئے مثلث پ اب کے ضلع علی الترتیب مثلث پ اَبَ کے ضلعوں کے مساوی ہیں۔ اسلئے یہ مثلثات متماثلاً مساوی ہیں۔ بالخصوص زاویہ اپ ب = زاویہ اَپ بَ

[1] یولر، *Theoria motus corporum solidorum*, 978

اور اس لئے اپ اَ = ب پ بَ ۔

اس سادہ مسئلہ کو استوار جسم کی حرکت پر استعمال کر سکتے ہیں جبکہ استوار جسم کا ایک نقطہ ثابت ہو۔ کیونکہ ایک ایسے کرہ کا خیال کرو جو اپنے مرکز کے گرد جو ثابت ہے حرکت کر سکتا ہے۔ تب اس مسئلہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ کرہ پر کے کوئی دو منتخب نقطے جیسے ا اور ب ایک ساتھ کسی دوسرے محلوں میں جیسے اَ اور بَ لائے جا سکتے ہیں اگر کرہ کو اس کے مرکز اور ایک خاص نقطہ پ میں سے گذرنے والے محور کے
گرد گھمایا جائے۔ پس یہ نتیجہ اخذ کیا جا سکتا ہے کہ ایک استوار جسم کے محل میں (۲۲۹)
جس کا ایک نقطہ ثابت ہے کوئی تبدیلی عمل میں لائی جا سکتی ہے اگر اسکو کسی محور کے گرد جو ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے گھمایا جائے۔

۲۸۹ — فرض کرو کہ کسی مستوی زاویے ا و ب کے اندر کوئی نقطہ پ سے تعبیر ہوتا ہے۔ خطوط مستقیم و ا اور و ب پر پ سے عمود کھینچو تو یہ ظاہر ہے کہ ان عمودوں کا درمیانی زاویہ، زاویہ ا و ب کا تکملہ ہے۔ اس کے جواب میں مجسم زاویہ کا مسئلہ بھی قابل غور ہے۔ فرض کرو کہ ایک مجسم زاویہ تین مستوی زاویوں سے بنتا ہے جو نقطہ و پر ملتے ہیں۔ مجسم زاویہ کے اندر کسی نقطہ پ سے مجسم زاویہ بنانے والے تینوں مستویوں پر عمود پ ل، پ م، پ ن کھینچو۔ اب وہ کروی مثلث جو تین مستویوں م پ ن، ن پ ل، ل پ م کے جواب میں ہے اس کروی مثلث کا قطبی مثلث ہے جو و پر کے مجسم زاویہ کے جواب میں ہے۔ اس بات کو پروفیسر ڈی مارگن (Prof. De Morgan) نے معلوم کیا تھا۔

۲۹۰ — فرض کرو کہ تین خطوط مستقیم ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور ایک مجسم زاویہ بناتے ہیں۔ فرض کرو کہ ان خطوط مستقیم میں سے دو دو کے درمیان زاویے عہ، بہ، جہ ہیں۔ اب اہم جملہ

$$\sqrt{1 - \text{جم}^2\,\text{عہ} - \text{جم}^2\,\text{بہ} - \text{جم}^2\,\text{جہ} + 2\,\text{جم عہ جم بہ جم جہ}}$$

کو اس مجسم زاویہ کی جیب کہینگے۔ دیکھو Baltzer کی تصنیف Theorie....der Determination اڈیشن دوم صفحہ ۱۷۴۔

اس تعریف کو اختیار کرنے کے بعد یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ مجسم زاویہ کی جیب صفر اور ایک کے درمیان واقع ہوتی ہے۔ (دیکھو دفعہ ۵۱)۔

ہم جانتے ہیں کہ کسی مستوی مثلث کا رقبہ دو ضلعوں اور ان کے درمیانی زاویہ کی جیب کے حاصل ضرب کے نصف کے مساوی ہوتا ہے۔ دفعہ ۲۶۰ سے اس مسئلہ کے جواب میں ہمیں حسب ذیل مسئلہ ملتا ہے۔ ذوار بعۃ السطوح کا حجم تینوں کناروں اور ان سے بننے والے مجسم زاویہ کی جیب کے حاصل ضرب کا $\frac{1}{6}$ ہوتا ہے۔

نیز علم جبل میں ہم جانتے ہیں کہ اگر ایک نقطہ پر عمل کرنے والی تین قوتیں تعادل میں ہوں تو ان میں سے ہر ایک باقی دو کے درمیانی زاویہ کی جیب کے متناسب ہوتی ہے۔ مسئلہ ذیل اسکے جواب میں ہے۔ اگر ایک نقطہ پر عمل کرنے والی چار قوتیں تعادل میں ہوں تو ان میں سے ہر ایک (۲۳۰) باقی تین کی سمتوں سے بننے والے مجسم زاویہ کی جیب کے متناسب ہوتی ہے۔ دیکھو مصنف کی "سکونیات" باب دوم۔

۲۹۱ — فرض کرو کہ ایک منتظم کثیر السطوح کے گرد ایک کرہ بنایا گیا ہے۔ کرہ کے مرکز سے کثیر السطوح کے رخوں پر عمود کھینچو اور ان کو خارج کرو تاکہ وہ کرہ کی سطح کو قطع کریں تو تشاکل سے ظاہر ہے کہ نقاط تقاطع ایک دوسرے منتظم کثیر السطوح کے راس ہونے چاہئیں۔

اسکی تصدیق ہو سکتی ہے۔ امتحان کرنے پر یہ معلوم ہوگا کہ اگر ایک منتظم کثیر السطوح کے مجسم زاویوں کی تعداد س اور رخوں کی تعداد ف ہے تو ایک دوسرا منتظم کثیر السطوح موجود ہوتا ہے جس کے مجسم زاویوں کی تعداد ف اور رخوں کی تعداد س ہے۔ دیکھو دفعہ ۲۵۵۔

۲۹۲ — کثیر السطوح دفعہ ۲۵۴ کا نتیجہ سب سے پہلے یولر نے حاصل کیا تھا۔

اسکا ثبوت جو وہاں دیا گیا ہے لیجنڈر سے منسوب ہے۔ ثبوت سے یہ بات ظاہر ہے کہ بہت سی صورتوں میں یہ نتیجہ صادق آتا ہے جنمیں کثیر السطوح کے مجسم زاوئے متداخل ہوتے ہیں۔ کیونکہ ثبوت کے لئے جس بات کی ضرورت ہے وہ صرف یہ ہے کہ کثیر السطوح کے اندر ایک ایسا نقطہ لینا ممکن ہو جس کو ہم کُرہ کا مرکز قرار دیسکیں تاکہ دفعہ ۲۵۴ کی بموجب بننے والے کثیر السطوح کوئی منطبق حصے نہ رکھیں۔ نتیجہ متذکرہ بالا عام صورت میں بھی درست ہے حتیٰ کہ ایسی صورتوں میں بھی جن میں وہ شرط پوری نہیں ہوتی جو دفعہ ۲۵۴ کے ثبوت کے لئے درکار ہے اس لئے ہم اس کا دوسرا ثبوت دینگے اور پھر اس نتیجہ سے چند اہم نتائج اخذ کرینگے۔ ہم ایک مسئلہ سے ابتدا کرتے ہیں جو کوشی سے منسوب ہے۔

۲۹۳ - فرض کرو کہ مستقیم الاضلاع اشکال کا کوئی جال ہے جنکا ایک مستوی میں ہونا ضروری نہیں لیکن جو ایک بند سطح بناتے نہ ہوں۔ فرض کرو کہ کناروں کی تعداد ع، اشکال کی تعداد ف، اور نقاط راس کی تعداد س ہے تو

ف + س = ع + ۱۔

ایک واحد مستوی شکل کی صورت میں یہ مسئلہ صریحاً درست ہے (۲۴۳
کیونکہ ف = ۱ اور س = ع۔ عام صورت میں اسکو استقراء کی مدد سے ثابت کیا جاسکتا ہے۔ کیونکہ فرض کرو کہ ف شکلوں کے جال کے لئے یہ مسئلہ درست ہے اور فرض کرو کہ ن ضلعوں والی ایک مستقیم الاضلاع شکل اس جال میں جمع کی گئی ہے، اس طرح جال اور اس زائد شکل کے م ضلع منطبق ہیں اور اس لئے م + ۱ راس منطبق ہیں۔ فرض کرو کہ اس نئے جال کے لحاظ سے ع، ف، س سے وہی چیزیں تعبیر ہوتی ہیں جو ابتدائی جال کے لحاظ سے ع، ف، س سے تعبیر ہوتی ہیں۔ تو

عَ = ع + ن - م ، فَ = ف + ۱ ، سَ = س + ن - (م + ۱)

اسلئے فَ + سَ - عَ = ف + س - ع

لیکن بموجب فرض ف + س = ع + ۱ اسلئے فَ + سَ = عَ + ۱

۲۹۴ — یولر کا مسئلہ ثابت کرنے کے لئے ہم یہ فرض کر لیتے ہیں کہ کثیر السطوح کا ایک رخ علٰحدہ کر لیا گیا ہے اور اس طرح ہمیں مستقیم الاضلاع اشکال کا ایک ایسا جال ملتا ہے جس پر کوشی کا مسئلہ استعمال ہو سکتا ہے۔

پس ف - ۱ + س = ع + ۱

اسلئے ف + س = ع + ۲

۲۹۵ — کسی کثیر السطوح میں رخوں کی تعداد جو ضلعوں کی طاق تعداد سے بنتے ہیں جفت ہوتی ہے اور مجسم زاویوں کی تعداد جو مستوی زاویوں کی طاق تعداد سے بنتے ہیں جفت ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ ا ، ب ، ج ، د ، ...... علی الترتیب رخوں کی تعداد وں کو تعبیر کرتے ہیں جو مثلثات ، ذوار بعتہ الاضلاع ، مخمسات ، مسدسات ، ... ہیں۔ فرض کرو کہ ء ، ہ ، جہ ، ضہ ، ..... ، علی الترتیب مجسم زاویوں کی تعدادوں کو تعبیر کرتے ہیں جو تین ، چار ، پانچ ، چھہ ، ..... مستوی زاویوں سے بنتے ہیں۔

اب چونکہ ہر کنارہ دو رخوں سے متعلق ہے اور دو مجسم زاویوں پر ختم ہوتا ہے اس لئے

۲ ع = ۳ا + ۴ ب + ۵ ج + ۶ د + ...

۲ ع = ۳ء + ۴ ہ + ۵ جہ + ۶ ضہ + ...

ان روابط سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ا + ج + ع + ... اور ء + جہ + ضہ + ... **جفت** اعداد ہیں۔

(۲۳۴۲) ۲۹۶ ـــ دفعہ ماسبق کی ترقیم کی بموجب

ف = ا + ب + ج + د + ...

س = عہ + بہ + جہ + ضہ + ...

ان سے اور دفعہ ماسبق کے روابط سے ہم حاصل کرتے ہیں

۲ ع - ۳ ف = ب + ۲ ج + ۳ د + ...

۲ ع - ۳ س = بہ + ۲ جہ + ۳ ضہ + ...

اس طرح ۲ ع، ۳ ف سے چھوٹا یا ۳ س سے چھوٹا نہیں ہوسکتا۔

۲۹۷ ـــ پچھلے دو دفعات میں ع، ف اور س کے لئے جو جملے دئے گئے ہیں انکو نتیجہ ۲ ف + ۲ س = ۴ + ۲ ع میں درج کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

۲ (ا + ب + ج + د + ...) + ۲ (عہ + بہ + جہ + ضہ + ...)

= ۴ + ۳ ا + ۴ ب + ۵ ج + ۶ د + ...

۲ (ا + ب + ج + د + ...) + ۲ (عہ + بہ + جہ + ضہ + ...

= ۴ + ۳ عہ + ۴ بہ + ۵ جہ + ۶ ضہ + ...

اسلئے

۲ (عہ + بہ + جہ + ضہ + ...) - (ا + ۲ ب + ۳ ج + ۴ د + ...) = ۴

(۱) ....

۲ (ا + ب + ج + د + ...) - (عہ + ۲ بہ + ۳ جہ + ۴ ضہ + ...) = ۴

(۲) ....

اس لئے جمع کرنے سے

ا + عہ - (ج + جہ) - ۲ (د + ضہ) - ۳ (ع + ضہ) - ...... = ۸

اس لئے مثلثی رخوں کی تعداد اور تین مستوی زاویوں سے بننے والے مجسم زاویوں کی تعداد کا مجموعہ آٹھ سے کم نہیں ہوسکتا۔

نیز (۱) اور (۲) سے عہ کو ساقط کرکے ہم حاصل کرتے ہیں

۳ ا + ۲ ب + ج - ع - ۲ ف = ...۲ بہ - ۴ جہ ..... = ۱۲

اس طرح ۳ ا + ۲ ب + ج، ۱۲ سے کم نہیں ہو سکتا۔ اس سے مختلف نتیجے حاصل ہو سکتے ہیں۔ مثلاً ایسا مجسم نہیں بنایا جا سکتا جسمیں مثلثی، چار ضلعی، یا پانچ ضلعی رخ نہ ہوں۔

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ۳ عہ + ۲ بہ + جہ، ۱۲ سے کم نہیں ہو سکتا۔

۲۹۸ - پائن سو (Poinsot) نے یہ ثابت کیا ہے کہ پانچ مشہور منتظم کثیر السطوح کے علاوہ چار دوسرے مجسموں کا وجود بھی ہے جو شکل میں پوری طرح متشاکل ہوتے ہیں اور اس لئے ان کو منتظم کہا جا سکتا ہے۔ پائن سو کے نتیجوں کی نوعیت کا اندازہ ایک کثیر السطوح کی صورت کا حوالہ دینے سے ہو سکتا ہے۔ فرض کرو کہ پانچ نقطے ا، ب، ج، د، ع یکے بعد دیگرے مساوی فاصلوں پر ایک دائرہ کے محیط کے گرد رکھدئے گئے ہیں۔ اگر ہم ہر نقطہ سے اس کے بعد والے نقطہ تک ایک خط مستقیم کھینچیں تو ہمیں معمولی منتظم مخمس ملیگا۔ لیکن اگر ہم ان نقطوں کو ترتیب ذیل سے ملائیں ۳۲ر

ا کو ج سے، ج کو ع سے، ع کو ب سے، ب کو د سے، د کو ا سے

تو تارہ نما ایک شکل بنتی ہے جس کو ہم ایک منتظم مخمس خیال کر سکتے ہیں۔

حسب سابق یہ معلوم ہوتا ہے کہ چار اور صرف چار نئے منتظم مجسم بن سکتے ہیں۔ ان مجسموں کے رخ ایک دوسرے کو قطع کرکے ایک دوسرے میں سے گذرتے ہیں اور ان پر یولر کا مسئلہ استعمال نہیں ہو سکتا۔

۲۹۹ - اب ہم دفعہ ۲۹۳ کی طرف رجوع کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ احاطہ کرنے والے گھیرے (Contour) میں کناروں کی تعداد ع ہے اور اس کے اندر کناروں کی تعداد عَ ہے۔ نیز فرض کرو کہ احاطہ کرنے والے گھیرے میں راسوں کی تعداد س ہے اور اس کے اندر سَ۔ اب

$$ع = ع + عَ ، سٖ = س + سَ$$

$$\text{اس لئے} \quad ۱ + ع + عَ = س + سَ + ف$$

لیکن ع = س

اس لئے ۱ + ع′ = س′ + ف

اب ہم یولر کے مسئلہ کی توسیع کر کے اس کا ثبوت دے سکتے ہیں۔ یہ ثبوت کوشی کا ہے۔

۳۰۰ — فرض کرو کہ ایک کثیر السطوح کو متعدد کثیر السطوحوں میں توڑ دیا گیا ہے۔ فرض کرو کہ ان کثیر السطوحوں کی تعداد ن، مجسم زاویوں کی تعداد س، رخوں کی تعداد ف، کناروں کی تعداد ع ہے تو

س + ف = ع + ن + ۱

کیونکہ فرض کرو کہ تمام کثیر السطوحوں کو ایک ایک کر کے جوڑا گیا ہے یعنی ایک کثیر السطوح سے ابتدا کر کے دوسرا اس کے ساتھ جوڑا گیا اور پھر تیسرا اور پھر چوتھا وغیرہ۔ فرض کرو کہ پہلے کثیر السطوح میں کناروں، رخوں، اور مجسم
(۲۳۴) زاویوں کی تعدادیں علی الترتیب ع، ف، س ہیں اور دوسرے کثیر السطوح میں کناروں، رخوں، اور مجسم زاویونکی تعدادیں علی الترتیب ع′، ف′، س′ ہیں جو اس میں اور پہلے میں مشترک نہیں ہیں۔ اسی طرح فرض کرو کہ تیسرے کثیر السطوح میں کناروں، رخوں اور مجسم زاویونکی تعدادیں علی الترتیب ع″، ف″، س″ ہیں جو اس میں اور پہلے یا دوسرے میں مشترک نہیں ہیں۔ علی ہذا القیاس۔ اب ہمیں نتائج ذیل حاصل ہونگے پہلا نتیجہ دفعہ ۲۹۴ کی رو سے اور باقی دوسرے ۲۹۹ کی رو سے۔

س + ف = ع + ۲

س′ + ف′ = ع′ + ۱

س″ + ف″ = ع″ + ۱

. . . .

اب چونکہ س + سَ + سً + ... = سٓ ف + فَ + فً + ... = ف
اور ع + عَ + عً + ... = ع اس لئے عمل جمع سے

س + ف = ع + ن + ۱

۱۰۳ — کثیرالسطوحوں کے نظریہ کا مطالعہ کرنے والے ناظرین کو حسب ذیل حوالے مفید ثابت ہونگے ۔

یولر، Novi commentarii Academiœ petropolitanœ جلد چہارم سنہ ۱۷۵۹ء۔

لیجنڈر، Geometrie جلد ششم پائن سو، Journal de l'Ecole Polytechnique باب دہم۔

کوشی Journal de l'Ecole Polytechnique باب شانزدہم۔

پائن سو اور برٹرانڈ Comptes Rendus........de l'Academie des sciences جلد ۴۶ ۔ کیٹالن (Catalan)،

Theoremes et Problemes de Geometric Elementaire

کرک میان (Kirknan)، Philosophical Transactions

بابتہ سنہ ۱۸۵۹ اور سنین مابعد لیسٹنگ (Listing)،

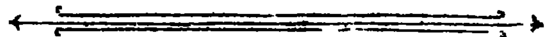
Abhandlungen der Koniglichen Geslischaft.....zu Gottingen جلد دہم۔

منتظم کثیرالسطوح کی گردشوں کے ساتھ غیر مسلسل گروہی نظریہ کا تعلق مطالعہ کرنا ہو تو دیکھو کلین (Klien) کی کتاب Das Ikosaeder

(جی، جی، مارس کا ترجمہ) لین کی Hohere Geometrie

جلد دوم اور Schoenflies کی

Krys tallsysteme und krystallstructur B.G. teubner, Leipzig, 1891.)



(۲۳۵)

متفرق مثالیں

امثلہ نمبری (۱۸)

ا ـــ اُن تمام قائم الزاویہ کروی مثلثوں کے راسوں کا طریق معلوم کرو جنکا وتر ایک ہی ہے۔ مساوات محصلہ سے ثابت کروکہ یہ طریق دائرہ ہے جبکہ کرہ کا نصف قطر لامتناہی ہو جاتا ہے۔

۲ ـــ کرہ کی سطح پر بڑے دائرہ کی ایک قوس ا ب ہے جسکا نقطہ وسطی ج ہے۔ ثابت کروکہ نقطہ ن کا طریق، ایسا کہ زاویہ ا ن ج = زاویہ ب ن ج، دو دائروں پر مشتمل ہے جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔ اس کی توضیح کرو جبکہ مثلث مستوی ہو جائے۔

۳ ـــ کرہ کی ایک دی ہوئی قوس پر کروی مثلثات رقبہ میں مساوی کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کروکہ دی ہوئی قوس کے مقابل کے راس کے طریق کی مساوات ہے

$$\text{مس}^{-1}\left\{\frac{\text{مس}\,(\text{عہ}+\text{فہ})}{\text{جب طہ}}\right\}+\text{مس}^{-1}\left\{\frac{\text{مس}\,(\text{عہ}-\text{فہ})}{\text{جب طہ}}\right\}$$

$$+\,\text{مس}^{-1}\left\{\frac{\text{مس طہ}}{\text{جب}\,(\text{عہ}+\text{فہ})}\right\}+\text{مس}^{-1}\left\{\frac{\text{مس طہ}}{\text{جب}\,(\text{عہ}-\text{فہ})}\right\}=\text{بہ}$$

جہاں ۲ عہ دی ہوئی قوس کا طول ہے اور طہ بڑے دائرہ کی وہ قوس جو طریق کے کسی نقطہ ن سے دی ہوئی قوس پر عمود ہے۔ فہ میلان ہے اُس بڑے دائرہ کا جس پر طہ ناپا گیا ہے اُس بڑے دائرہ کے ساتھ جو دی ہوئی قوس کی علی القوائم تنصیف کرتا ہے اور یہ مستقل ہے۔

۴ ـــ کسی کروی مثلث میں

$$\text{مس ج}=\frac{\text{جم ا هم ا}+\text{جم ب هم ب}}{\text{هم ا هم ب}-\text{جم ا جم ب}}$$

۵ — کروی مثلث اب ج کے زاویوں کو تنصیف کرنے والی توسوں کے نقطہ تقاطع سے راسوں ا، ب، ج کے فاصلے علی الترتیب طہ، فہ، ثہ سے تعبیر ہوں تو ثابت کرو کہ

جم طہ جب (ب-ج) + جم فہ جب (ج-ا) + جم ثہ جب (ا-ب) = ۰

۶ — اگر کروی مثلث اب ج کے ضلعوں ب ج، ج ا، اب کے قطب علی الترتیب اَ، بَ، جَ ہوں تو ثابت کرو کہ بڑے دائرے ا اَ، ب بَ، ج جَ ایک نقطہ ن پر ملتے ہیں ایسے کہ

جم ن ا جم ب ج = جم ن ب جم ج ا = جم ن ج جم اب

۷ — کروی مثلث اب ج کے راسوں سے مقابل ضلعوں پر عمود وار توسیں اد، ب ع، ج ف کھینچی گئیں ہیں جنکا نقطہ تقاطع و ہے اور جو مقابل ضلعوں کو علی الترتیب نقاط د، ع، ف پر ملتی ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{مس اد}}{\text{مس ود}}\text{، }\frac{\text{مس ب ع}}{\text{مس و ع}}\text{، }\frac{\text{مس ج ف}}{\text{مس و ف}}$$

علی الترتیب

$$1+\frac{\text{جم ا}}{\text{جم ب جم ج}}\text{، }1+\frac{\text{جم ب}}{\text{جم ج جم ا}}\text{، }1+\frac{\text{جم ج}}{\text{جم ا جم ب}}$$ (۲۳۶)

کے مساوی ہیں۔

۸ — اگر پ، ق، ر، بڑے دائروں کی توسیں ہوں جو ایک مثلث کے راسوں سے مقابل ضلعوں پر عمود ہیں اور اگر ان توسوں کے مقطوعے (عہ، عہَ)، (بہ، بہَ)، (جہ، جہَ) ہوں تو ثابت کرو کہ

مس عہ مس عہَ = مس بہ مس بہَ = مس جہ مس جہَ

اور
$$\frac{\text{جم پ}}{\text{جم عہ جم عہَ}}=\frac{\text{جم ق}}{\text{جم بہ جم بہَ}}=\frac{\text{جم ر}}{\text{جم جہ جم جہَ}}$$

۹ — اگر ایک کروی مثلث میں راسوں سے ان کے مقابل کے نقاط وسطی تک توسیں کھینچی جائیں اور اگر ان میں سے ایک توس کے (جو ضلع ا کی تنصیف کرتی ہے)

دو حصے عہ، عہَ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب عہ}}{\text{جب عہَ}} = ۲\ \text{جم}\ \frac{\text{ا}}{۲}$$

۱۰۔ اگر بڑے دائرہ کی وہ قوس جو کروی مثلث کے ضلعوں اب، اج کی تنصیف کرتی ہے ب ج محدودہ کو ق پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم اق جب}\ \frac{\text{ا}}{۲} = \text{جب}\ \frac{\text{ج} - \text{ب}}{۲}\ \text{جب}\ \frac{\text{ج} + \text{ب}}{۲}$$

۱۱۔ اب ج د ایک کروی ذوار بعۃ الاضلاع ہے۔ متقابلہ ضلع اب، ج د اگر خارج کئے جائیں تو ع پر ملتے ہیں اور اد، ب ج نقطہ ف پر ملتے ہیں۔ ع سے ذوار بعۃ الاضلاع کے وتروں پر علی القوائم قوسیں کھینچی گئیں ہیں۔ اسی طرح ف سے۔ ثابت کرو کہ قبل الذکر قوسوں کی جیوب میں نسبت وہی ہے جو موخر الذکر قوسوں کی جیوب میں ہے۔

۱۲۔ اگر اب ج د ایک کروی ذوار بعۃ الاضلاع ہو جس کے ضلع اب، د ج خارج کرنے سے نقطہ پ پر اور ضلع اد، ب ج نقطہ ق پر ملتے ہیں اور جس کے وتر ایک دوسرے کو سا پر قطع کرتے ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب اب جب ج د جم پ} \sim \text{جب اد جب ب ج جم ق}$$
$$= \text{جب اج جب ب د جم سا}$$

۱۳۔ اگر ایک کروی مثلث کے زاویہ ا کے جواب میں وتری مثلث کا زاویہ اَ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم اَ} = \text{جب (س - ا) جم}\ \frac{\text{ا}}{۲}$$

۱۴۔ اگر ایک کروی مثلث کے بیرونی دائرہ کے نصف قطر کا مماس اس مثلث کے اندرونی دائرہ کے نصف قطر کے مماس کا دگنا ہو تو مثلث متساوی الاضلاع ہوگا

۱۵۔ ایک دائرہ کی قوس اپ جس کا نصف قطر وہی ہے جو کرہ کا ہے ایک کروی مثلث کے دو ضلعوں میں سے بڑے ضلع کے مساوی ہے اور قوس اف جو اسی سمت میں لگئی ہے چھوٹے ضلع کے مساوی ہے۔ اپ کی

جیب پ م، نقطہ ع پر تقسیم کیگئی ہے اسطور پر کہ $\frac{ع م}{پ م}$ = اِن دو ضلعوں کے درمیانی زاویہ کی جیب التمام۔ ع سے اُس مماس کے متوازی کھینچا گیا ہے جو دائرہ کے نقطہ ق پر ہے۔ ثابت کرو کہ کروی مثلث کا باقی ضلع قوس ق پ سے کے مساوی ہے۔ (۲۲۷)

۱۶۔ ایک کروی مثلث ا ب ج کے اندر کوئی نقطہ پ لیا گیا ہے اور اِس نقطہ میں سے گذرتے ہوئے مثلث کے راسوں ا، ب، ج سے بڑے دائرے کھینچے گئے ہیں جو مقابل کے ضلعوں کو علی الترتیب د، ب، ج، پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جیب پ د جم پ ا}}{\text{جیب ا د}} + \frac{\text{جیب پ ب جم پ ب}}{\text{جیب ب ب}} + \frac{\text{جیب پ ج جم پ ج}}{\text{جیب ج ج}} = ۱$$

۱۷۔ زمین کی سطح پر خط استواء کے ایک ہی جانب دو مقامات ا اور ب واقع ہیں۔ ا استواء سے ب کی بہ نسبت دُور واقع ہے۔ اگر ب سے ا کی سمت بہ نسبت ان تمام مقامات کے جنکا عرض بلد وہی ہے جو ب کا ہے زیادہ تر تقریباً مشرقی ہو تو ا سے ب کی سمت معلوم کرو۔

۱۸۔ امثلہ نمبری (۳) کے آخری سوال (۱۸) میں جو نتیجہ درج ہے اس سے ایک منتظم بارہ سطحی کے امکان کا استخراج کرو۔

۱۹۔ ایک کرہ کی سطح پر ا اور ب دو ثابت نقطے ہیں اور پ کوئی نقطہ ہے۔ اگر د اور ب دئے ہوئے مستقلات ہوں تو ثابت کرو کہ ا ب میں یا ا ب محدودہ میں ایک ثابت نقطہ س ہمیشہ معلوم کیا جا سکتا ہے ایسا کہ

د جم ا پ + ب جم ب پ = س جم س پ

جہاں س مستقل ہے۔

۲۰۔ ایک کرہ کی سطح پر ا، ب، ج.... ثابت نقطے ہیں۔ د، ب، ج.... دئے ہوئے

مستقل ہیں ۔ اگر کرہ کی سطح پر حپ ایک نقطہ ہو ایسا کہ

رجم (اپ + ب جم ب پ + ج جم ج پ + ... = مستقل

تو ثابت کرو کہ حپ کا طریق ایک دائرہ ہے ۔

امثلہ نمبری (۱۹)

۱ ـــ ایک منتظم کروی ذو اربعۃ الاضلاع کا ایک ضلع = جم$^{-1}$ ($\frac{۱}{۳}$) ۔ اس کا ایک زاویہ معلوم کرو ۔ (R. U. I. 1899)

۲ ـــ ثابت کرو کہ کرہ پر اقلیدس حصہ دوم کے مسئلہ ۲۱ کا صادق آنا ضروری نہیں ہے بتاؤ کہ اقلیدس کا ثبوت کرہ پر کہاں ناکام رہتا ہے ۔

اُن تمام کروی مثلثوں میں جو ایک دیے ہوئے قاعدہ (ایک ربع سے کم) پر قائم ہیں اور جن کے راس ایک دیے ہوئے بڑے دائرہ پر واقع ہیں (جو قاعدہ کو اس کے ایک اندرونی نقطہ پر عمودا قطع کرتا ہے وہ مثلث معلوم کرو جس کا زاویہ راس چھوٹے سے چھوٹا ہے ۔ (R. U. I. 1899)

۳ ـــ ایک کروی مثلث میں ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{م}^{2}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ب} + \text{م}^{2}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ج} + ۲\,\text{م}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ب}\,\text{م}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ج}\,\text{جم}\,\text{ا}}{\text{جب}^{2}\,\text{ا}}$$

اُس جملے کے مساوی ہے جو ب ، ج ، اور ا کی جگہ زاویوں کے دوسرے جوڑے اور اِن کے درمیانی ضلع کو رکھنے سے حاصل ہوتا ہے ۔ جملہ بالا کی قیمت ضلعوں کی رقوم میں متشاکلاً معلوم کرو ۔ (R. U. I. 1895) (۲۴۸)

۴ ـــ ایک ذو اربعۃ السطوح میں اگر ا ، ا$_{\text{م}}$ متقابلہ کناروں کا ایک جوڑا ہوں اور اِن کناروں پر دو سطحی زاویے (، (م ہوں تو جملہ

$$\frac{\text{ا}\ \text{ا}_{\text{م}}}{\text{جب}\ (\ \text{جب}\ (_{\text{م}}}$$

کی ایک ہی قیمت ہوگی خواہ کوئی جوڑا لیا جائے ۔ (R. U. I. 1893)

۵ ـــ عرض بلد کے ایک متغیر توازی پر تین نقطے ا ، ب ، ج ہیں ۔ قطب

ق ہے۔ قوسیں اب اور ب ج مساوی ہیں۔ ایک بڑے دائرہ کی قوس سے ق ب کو ملاؤ اور فرض کرو کہ ا اور ج میں سے گذرنیوالا بڑا دائرہ ق ب کو د پر قطع کرتا ہے۔ ا اور ب کے طول بلدوں کا فرق مستقل ہے اور لہ سے تعبیر ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ د ب بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ ب کے عرض بلد کا مماس $\frac{1}{2}$ جم لہ کے مساوی ہو۔ (Sci and Art. 1897)

۶ — ایک چھوٹے دائرہ میں ایک کروی ذو اربعۃ الاضلاع اب ج د بنایا گیا ہے جس کے ضلع علی الترتیب ا، ب، ا، ب ہیں۔ ثابت کرو کہ

مس $\frac{1}{2}$ ا = جم $\frac{1}{2}$ (ا ـ ب) قط $\frac{1}{2}$ (ا + ب)،

(Sci. and Art, 1897)

۷ — ایک مثلث اب ج کے ضلع اج کا نقطہ وسطی م ہے اور ب اور م میں سے گذرنیوالا بڑا دائرہ ب ج ممدودہ کو د پر ملتا ہے۔

اگر زاوئے اج د اور اب ج مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ

ب + ج = π،

اگر زاوئے اج د اور ب اج مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ

ب م = $\frac{1}{2}$ π

(Sci. and Art 1897)

۸ — ایک کروی مثلث کے دو ضلعوں کا مجموعہ π ہے۔ ثابت کرو کہ متقابل زاویوں کا مجموعہ بھی π ہے۔

پ اب ایک کروی مثلث ہے جبکا ضلع اب ثابت ہے اور زاوئے پ اب، پ ب ا متکملہ ہیں۔ ثابت کرو کہ راس پ ایک ثابت بڑے دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔ (Sci. and Art 1899)

۹ — ایک کرہ پر کے دو سہ قائمہ زاوئی مثلثوں کے راس ا، ب، ج اور اَ، بَ، جَ ہیں جو ہر صورت میں ایک ہی جہت میں لئے گئے ہیں۔ ا اَ، ب بَ، ج جَ کو ملایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ان میں سے ہر قوس باقی دو قوسوں سے ایسے نقطوں پر قطع ہوگی جن کے فاصلے اس کے سروں سے

مساوی ہونگے۔

۱۰۔ اگر ایک کروی چار زاویٔ کے متقابلہ ضلع ایک دوسرے پر عمود ہوں تو وتر بھی ایک دوسرے پر عمود ہوں گے۔

اگر ایک کمل کروی ذو اربعتہ الاضلاع کے دو وتر ربعات ہوں تو تیسرا وتر بھی ایک ربع ہوگا۔ (Joachimsthal)

۱۱۔ ایک ذو اربعتہ السطوح کے دو رخوں کے رقبے △، △َ ہیں، ان کا زاویۂ تقاطع عہ ہے اور کنارہ کا طول ل۔ ذو اربعتہ السطوح کا حجم ح ہے۔ ثابت کرو کہ

۲ △ △َ جب عہ = ۳ ل ح

(۲۳۹) ۱۲۔ ایک چھوٹے دائرہ میں بنائے ہوے ذو اربعتہ الاضلاع کے اضلاع ا، ب، ج اور د ہیں۔ نصف گھیرا س سے اور کروی اضافہ ع سے تعبیر ہوتے ہیں اور ن اور ک ذیل کی مساواتوں سے متعین ہوتے ہیں۔

ن = √[جب ½(س − ا) جب ½(س − ب) جب ½(س − ج) جب ½(س − د)]

ک = √[جم ½(ا + ب + ج + د) جم ½(ا + ب − ج − د) جم ½(ا + ج − ب − د) جم ½(ا + د − ب − ج)]

ثابت کرو کہ

جب ½ ع = ن / √[جم ½ ا جم ½ ب جم ½ ج جم ½ د]

جم ½ ع = ک / √[جم ½ ا جم ½ ب جم ½ ج جم ½ د]

(Hart.)

۱۳۔ ثابت کرو کہ کروی مثلث کے زاویوں کا جیکوبی، بلحاظ ضلعوں کے عدداً (جب ا)/(جب د) کے مساوی ہے۔

(Tripos, 1901)

۱۴ - **تعریف** - کروی متوازی الاضلاع[1] سے ایسا ذو اربعۃ الاضلاع ا ب ج د مراد ہے جس کے وتر ا ج ، ب د ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہوں -

اس کے حسب ذیل خواص بہ آسانی ثابت ہو سکتے ہیں -

(۱) وتروں کا نقطہ تقاطع س متقابلہ اضلاع کے ایک جوڑے سے متساوی الفصل ہوتا ہے - س کو متوازی الاضلاع کا کروی مرکز کہتے ہیں -

(۲) اگر متوازی الاضلاع کے دو متصلہ زاویے مساوی ہوں تو اس کے گرد ایک چھوٹا دائرہ کھینچا جا سکتا ہے -

(۳) اگر متوازی الاضلاع کے دو متصلہ ضلع مساوی ہوں تو اس کے اندر ایک چھوٹا دائرہ کھینچا جا سکتا ہے -

(۴) کروی متوازی الاضلاع کی متکافی شکل ایک دوسرا متوازی الاضلاع ہے جسکا کروی مرکز وہی ہے -

(۵) متقابل اضلاع کے ایک جوڑے کے نقاط تقاطع ، س کے قطبی بڑے دائرہ پر واقع ہوتے ہیں -

(۶) متوازی الاضلاع کے دو متصلہ کونے اور دوسرے دو کونوں کے تحت قدمی نقطے ایک چھوٹے دائرہ پر واقع ہوتے ہیں -

(۷) اگر ایک دے ہوے چھوٹے دائرہ پر دو ثابت نقطے ا اور ب ہوں اور اس کے تحت قدمی دائرہ پر دو متغیر نقطے پ اور ق ہوں ایسے کہ پ ق = ا ب تو بڑے دائروں ا پ ، پ ق ، ق ب ، ب ا سے بنی ہوئی شکل متوازی الاضلاع ہوگی -

(۸) اس متوازی الاضلاع کا رقبہ وہی ہوگا خواہ پ اور ق چھوٹے دائرہ پر کہیں واقع ہوں بشرطیکہ پ ق = ا ب - اس کا کروی اضافہ اکس زاویہ کا

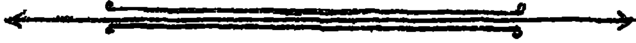
---

[1] یولر ، Nov. Act. Petrop. باب دہم صفحہ ۵۷ - گوڈرمیان Neid.sph. دفعات ۸۷ تا ۹۶ - بالٹزر ، Stereometrie باب چہارم ، ۱۶ -

چارگنا ہوگا جو بڑے دائرہ اب اور چھوٹے دائرہ اب کے درمیان ہے۔

(۹) مثلث اب پ کا رقبہ مستقل ہوگا۔

(۱۰) بڑے دائروں کی قوسوں پ ا′پ ب اور چھوٹے دائرہ کی قوس اب سے بننے والے مثلث کے زاویوں کا مجموعہ دو قائمہ کے مساوی ہوگا۔



(۲۴۰)

انیسواں باب

کروی مثلث کی تعریف کی توسیع

۳۰۲ — ابواب گذشتہ میں صرف ایسے مثلثوں پر غور کرنا مناسب سمجھا گیا ہے جو دفعات ۲۲ اور ۲۳ کی وضعی حدود کی پابندی کرتے ہیں یعنی جن کا کوئی ضلع یا کوئی زاویہ دو زاویہ قائمہ سے تجاوز نہیں ہوتا۔ علم مثلث کروی کے عملی استعمالات میں ایسے ہی مثلثوں سے واسطہ پڑتا ہے اور انہی مثلثوں کے ان خواص کا جان لینا ضروری ہے۔ لیکن نظری ریاضیات میں اس مضمون کو موزوں و مناسب جگہ دینے کے لئے یہ ضروری ہے کہ اس کی پوری عمومیت برقرار رکھی جائے اور ایسے حدود کو ہٹا دیا جائے جو نظری نقطہ نظر سے اختیاری اور غیر ضروری ہیں۔ موبیس (Mobirus) [1] پہلا شخص تھا جس نے مثلث کی رسمی تعریف کی توسیع کی اور یہ بات ثابت کردی کہ عام مثلث بھی ان اساسی ضوابط کو پورا کرتا ہے جو ابتدائی مثلث کی صورت میں پورے ہوتے ہیں۔

[1] دیکھو، "*Ueber eine neue Behandlungsweise der analytischen Sphärik*" (1846), *Ges. Werke, Bd. II,* and

اور "*Entwickelung der Grundformeln der sphär- ischen Trigonometrie in grosstmoglischer Allgemeinheit*" (*Verhandlungen der Kon. Sach. Gesellschaft der Wiss. zu Leipzig*, (1860).

نیز دیکھو Chauvenet کا علم مثلث حصہ دوم باب چہارم۔

یہ شخص بڑے دائروں کی سمتیں مقرر نہیں کرتا جن سے مثلث بنتا ہے۔

اِس باب میں صرف اختصاراً ایسی باتوں پر غور کرنا اور چند اہم ترین اساسی ضابطوں کا حاصل کرنا مقصود ہے جو اس اہم تعمیم میں مضمر ہیں۔ اس مضمون پر پوری شرح و بسط کے ساتھ ڈاکٹر ای۔ اسٹڈی[1] (Dr. E Study) نے اپنے مقالہ اسفریکل ٹرگنو میٹری اینڈ آرتھا گنل سبسٹیٹیوشن[2] میں (۲۲۱)
بحث کی ہے اور اسی سے اس باب کے مختلف دفعات کا مواد اخذ کیا گیا ہے

۳۰۳۔ ایک پورے گھماؤ سے یعنی ایسی گردش محوری سے جس کا زاویہ ۲π ہو گھومی ہوئی شے کا محل غیر متبدل رہتا ہے اس لئے ایسے زاویوں یا بڑے دائروں کی قوسوں کو ایک دوسرے کے مساوی قرار دینا جن کا فرق ۲π کا ضعف ہے ایک قدرتی بات ہے اور علاوہ بریں زیادہ سہولت بخش بھی ہے۔ اس سے ہمارا وہ مفروضہ بھی ہر طرح روا ہو جاتا ہے (سوائے ایک صورت کے جسکو حسب موقع بیان کیا جائے گا) جس سے ہم ابتدا کرینگے یعنی یہ کہ کسی کروی مثلث کا ہر ضلع اور ہر زاویہ صفر اور ۲π کے درمیان واقع ہوتا ہے۔ اس مفروض کو مان لینے کے بعد یہ دکھانا بالکل آسان ہے کہ اگر کرہ پر تین نقطے دیے جائیں اور ان کو راس مانکر کروی مثلث بنائے جائیں تو ایسے کروی مثلثوں کی تعداد اگرچیکہ ایک سے زیادہ ہوگی لیکن لامتناہی نہیں ہوسکتی

۳۰۴۔ نیز کرہ کی سطح پر کسی نقطہ کے گرد کے زاویوں پر غور کرتے وقت ہمیں ایک جہت یعنی گھماؤ کی سمت کا انتخاب کرنا ہوگا تاکہ اس جہت میں زاویوں کو مثبت شمار کیا جاسکے۔ مثلاً اس جہت کو جو گھڑی کی سوئیوں کی گردش کی جہت کے مخالف ہو جب اس گھڑی کو کرہ کی سطح پر اوپر وار رخ کے ساتھ رکھا جائے۔ اگر ہم یہ تصور کریں کہ کرہ کی پوری سطح پر گھڑی کو نقطہ بہ نقطہ حرکت دی گئی ہے تو کرہ کی سطح کے ہر نقطہ کے جواب میں ہمیں ایک جہت

[1] ای۔ اسٹڈی، Sparishe Trigonometrie, Orthogonale Substitutionen und Elliptische Functionen.

[2] Spherical Trigonometry and Orthogonal Substitutions.

ملے گی اور اس طرح اس جہت میں جو گردشیں ہونگی ان کو مثبت شمار کیا جا سکیگا

۳۰۵ - کروی مثلث کی تعریف - اب فرض کرو کہ کرہ پر ا، ب، ج تین نقطے ہیں اور انکو بڑے دائروں کی قوسوں سے ملایا گیا ہے - فرض کرو کہ ہم ہر بڑے دائرہ کی مثبت سمت اپنے اختیار سے منتخب کرتے ہیں - فرض کرو کہ ا، ب، ج سے وہ قوسیں تعبیر ہوتی ہیں جو ایسے نقطہ سے مرتسم ہوتی ہیں جو ب سے نکلتا ہے اور بڑے دائرہ ب ج پر اسکی مثبت سمت میں ج تک حرکت کرتا ہے اور پھر ج ا پر اسکی مثبت سمت میں ا تک حرکت کرتا ہے، ا ب پر اسکی مثبت سمت میں حرکت کرتے ہوئے ب تک پہنچتا ہے - ظاہر ہے کہ ان قوسوں کی مقداریں صفر اور ۲ π کے درمیان واقع ہونگی - نیز ہم عہ سے وہ زاویہ تعبیر کرتے ہیں جس میں سے بڑے دائرہ ج ا کو مثبت جہت میں ا کے گرد گھمانا پڑتا ہے اس غرض سے کہ اسکی مثبت سمت کو بڑے دائرہ ا ب کی مثبت سمت پر منطبق کیا جا سکے - عہ کی مقدار صفر اور ۲ π کے درمیان واقع ہوگی - اسی طرح یہ اور جہ کی تعریف کیجا سکتی ہے -

اس طرح ا، ب، ج، عہ، یہ، جہ چھ عناصر حاصل ہونگے جنکو ہم کروی مثلث ا ب ج کے عناصر کہہ سکتے ہیں - ہم زاویوں عہ، یہ، جہ کو مثلث کے زاوئے اور قوسوں ا، ب، ج کو اسکے ضلع کہینگے -

۳۰۶ - یہ مشاہدہ طلب ہے کہ یہ مثلث بہ خلاف پرانے کروی مثلث کے اپنے تینوں راسوں کے مقامات سے کافی طور پر متعارف نہیں ہوتا بلکہ اسکی تخصیص کے لئے یہ باتیں بھی ضروری ہیں (۱) کرہ پر نقطوں کے گرد گردشوں کی ایک اختیاری جہت، (۲) مثبت سمتیں جو اختیاری طور پر تین بڑے دائروں کے لئے مقرر کیجائیں اور (۳) وہ ترتیب جس میں مثلث کے راس اسکے نام میں واقع ہوتے ہیں (کیونکہ مثلث ا ب ج کے عناصر وہی نہیں ہیں جو مثلث ا ج ب کے ہیں خواہ دوسری چیزیں

غیر متغیر رہیں)۔

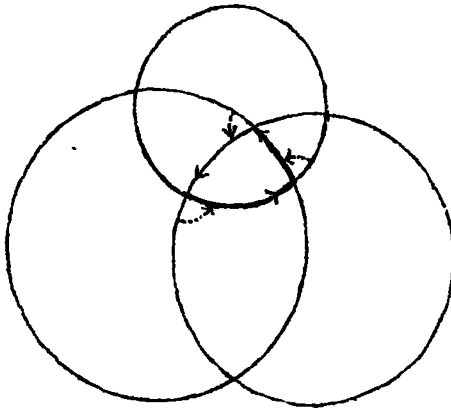
۳۰۷ ۔ اس کو بھی احتیاط کے ساتھ نوٹ کرلینا چاہیئے کہ عام کروی مثلث کے زاویے عہ، بہ، جہ جنکی اوپر تعریف ہوئی ہے اُس خاص صورت میں جبکہ مثلث کے ضلع سب کے سب π سے کم ہوں اُن داخلہ زاویوں کے جواب میں نہیں ہوتے جنکو ہم نے گذشتہ ابواب میں ا، ب، ج سے تعبیر کیا ہے بلکہ وہ ان کے تکملوں کے جواب میں ہوتے ہیں۔ اس لئے عام مثلث کے زاویوں کو عہ، بہ، جہ سے تعبیر کیا گیا ہے تاکہ جملہ "کروی مثلث کے زاوئے" کے نئے اور پرانے معنوں میں امتیاز ہوسکے اور کوئی انتشار پیدا نہ ہو۔

(۲۴۳) ۳۰۸ ۔ **قطبی مثلث** ۔ ہر بڑے دائرہ کے دو قطب ہوتے ہیں لیکن اگر ہم دائرہ پر چلنے والے نقطہ کی دو ممکنہ سمتوں میں سے کوئی ایک سمت اختیاری طور پر مقرر کریں تو ان دو قطبوں میں سے ایک قطب کو ہم دائرہ کے قطب سے منسوب کرسکتے ہیں اور اس طرح ابہام رفع ہوسکتا ہے۔ فی الحقیقت ہم اُس قطب کا انتخاب کرتے ہیں جو اُس شخص کے بائیں جانب واقع ہوتا ہے جو کرہ کی بیرونی سطح پر اپنے پیر مرکز کی جانب رکھکر بڑے دائرہ پر اسکی مثبت سمت میں چلتا ہے۔

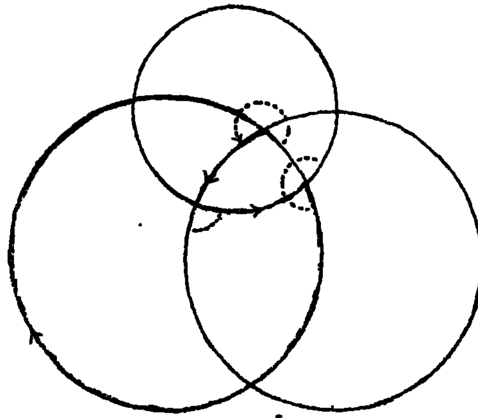
اب کسی دئے ہوئے کروی مثلث کے قطبی مثلث سے وہ مثلث مُراد ہوگا جس کے راس دئے ہوئے مثلث کے ضلعوں کے قطب ہوں اور جس کے ضلعوں کے قطب دئے ہوئے مثلث کے راس ہوں۔ ان دونوں مثلثوں کا تعلق بالکل متکافی ہے اور یہ آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ ایک مثلث کے ضلع دوسرے مثلث کے متناظر زاویوں کے مساوی ہیں۔ اس طرح کروی مثلث جوڑوں میں وقوع پذیر ہوتے ہیں جنکے ارکان ایک دوسرے سے زاویوں اور ضلعوں کے باہمی تبادلہ سے اخذ کئے جاسکتے ہیں۔

۳۰۹ ۔ مختلف مثلث جنکے راس ایک ہی ہیں ۔ تین دئے ہوئے راس رکھنے والے مثلثوں کی تعداد پر غور کرتے وقت ہم دیکھتے ہیں کہ ان نقطوں کو ملانے والے تین بڑے دائروں میں سے ہر ایک دائرہ کی صورت میں دو سمتوں سے واسطہ پڑتا ہے جنمیں سے کوئی ایک سمت اختیار کیجا سکتی ہے جسکو مثبت قرار دیا جا سکتا ہے ۔ اسں لئے ۲ × ۲ × ۲ یعنی ۸ مختلف ممکن مثلث ہونگے ۔ لیکن کرہ کی سطح پر ایک نقطہ کے گرد کے زاویوں کی مقررہ مثبت جہت کی تبدیلی کے حق کو اگر ہم محفوظ رکھ لیں تو ان مثلثوں کی تعداد ۱۶ ہو جائے گی ۔ ذیل کی شکلوں میں جو ایک مستوی پر ظِل ہیں قبل الذکر آٹھ مثلثوں میں سے چار کو ظاہر کیا گیا ہے ۔ باقی دوسرے مثلث ان سے بہ آسانی اخذ ہو سکتے ہیں ۔ ضلعوں کو بڑے دائروں کی دوسری قوسوں کی بہ نسبت زیادہ گہرے خطوں سے دکھایا گیا ہے اور زاویوں کو تیروں کے ہلکے منحنیوں سے ۔

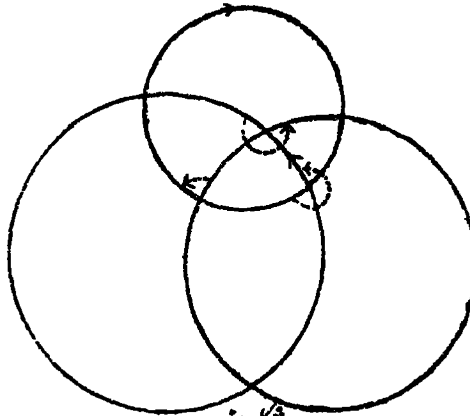
(۲۲۴)



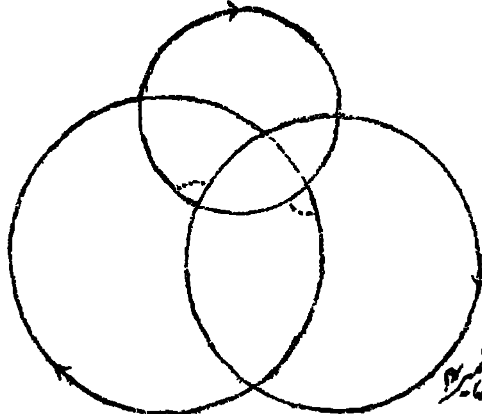
شکل (۱)



شکل نمبر (۲)



شکل نمبر (۳)



شکل نمبر ۴

۳۱۰ — ان آٹھ مثلثوں کے عناصر میں تمیز کرنے کے لئے بہتر یہ ہوگا کہ ہم لاحقوں (۳۴۶)
۱، ۲، ...، ۸ سے کام لیں۔ لاحقہ ۱ اس مخصوص مثلث کے لئے استعمال ہوسکتا ہے جسکے ضلع نصف دائروں سے کم ہیں۔ اگر لاحقہ ۲ اس مثلث کے عناصر کو لگا دیا جائے جو پہلے مثلث سے اس طرح حاصل ہوتا ہے کہ بڑے دائرہ ب ج کی سمت متعلقہ کو الٹ دیا جائے تو اشکال (۱) اور (۲) کے مقابلہ سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\left.\begin{array}{l} ا_۲ = ۲\pi - ا_۱ ،\ ب_۲ = ب_۱ ،\ ج_۲ = ج_۱ \\ عہ_۲ = عہ_۱ ،\ بہ_۲ = \pi + بہ_۱ ،\ جہ_۲ = \pi + جہ_۱ \end{array}\right\} \ldots\ldots (ا)$$

دوسرے مثلثوں میں متناظر ابدالات بہ آسانی عمل میں لائے جاسکتے ہیں اور اس طرح ہمیں حسب ذیل نتائج کی ایک جدول ملتی ہے:-

جدول (۱)

	ا	ب	ج	عہ	بہ	جہ
(۱)	$ا_۱$	$ب_۱$	$ج_۱$	$عہ_۱$	$بہ_۱$	$جہ_۱$
(۲)	$۲\pi - ا_۱$	$ب_۱$	$ج_۱$	$عہ_۱$	$\pi + بہ_۱$	$\pi + جہ_۱$
(۳)	$ا_۱$	$\pi - ب_۱$	$ج_۱$	$\pi + عہ_۱$	$بہ_۱$	$\pi + جہ_۱$
(۴)	$ا_۱$	$ب_۱$	$۲\pi - ج_۱$	$\pi + عہ_۱$	$\pi + بہ_۱$	$+ جہ_۱$
(۵)	$ا_۱$	$۲\pi - ب_۱$	$۲\pi - ج_۱$	$عہ_۱$	$\pi + بہ_۱$	$\pi + جہ_۱$
(۶)	$۲\pi - ا_۱$	$ب_۱$	$۲\pi - ج_۱$	$\pi + عہ_۱$	$بہ_۱$	$\pi + جہ_۱$
(۷)	$۲\pi - ا_۱$	$\pi - ب_۱$	$ج_۱$	$\pi + عہ_۱$	$\pi + بہ_۱$	$جہ_۱$
(۸)	$۲\pi - ا_۱$	$\pi - ب_۱$	$۲\pi - ج_۱$	$عہ_۱$	$بہ_۱$	$جہ_۱$

ان مثلثوں میں سے کسی سات کو آٹھویں سے اخذ کرنے میں صرف ایک نمونہ کے استعمال کی ضرورت پڑتی ہے یعنی وہ جو ایک بڑے دائرہ کی مقررہ سمت کو الٹ دینے کے جواب میں ہے۔ مثلاً اس کی مدد سے (۲)، (۳)، اور (۴) کو (۱) سے اخذ کیا جاسکتا ہے، (۵)، (۶) اور (۷) کو

(۲)، (۳) اور (۴) سے اور (۸) کو (۵)، (۶)، یا (۷) سے پہلی شکل، (۱) کو تعبیر کرتی ہے، دوسری (۲)، (۳)، یا (۴) کو، تیسری (۵)، (۶)، یا (۷) کو اور چوتھی (۸) کو۔

۳۱۱ ۔ نامساواتیں جو ضلعوں اور زاویوں سے پوری ہوتی ہیں (۲۴۷)

ابواب گذشتہ میں ہم نے جس قسم کے مثلثوں پر غور کیا ہے اس قسم کے ایک مثلث کے تین ضلع دیے جائیں تو اس کے زاویوں کی تعیین ہو جاتی ہے لیکن اگر قوسیں ا، ب، ج دی جائیں تو ان سے ایک حقیقی مثلث بن سکتا ہے صرف اگر حسب ذیل نامساواتیں پوری ہوں

ا + ب + ج ≤ ۲π، ب + ج − ا ≥ ۰،

ج + ا − ب ≥ ۰، ا + ب − ج ≥ ۰۔

اسی طرح اگر زاوئے ا، ب، ج دیے جائیں تو مثلث ممکن ہے صرف اگر

ا + ب + ج ≥ π

π − ب − ج + ا ≤ ۰، π − ج − ا + ب ≤ ۰،

π − ا − ب + ج ≤ ۰۔

اب فرض کرو کہ ہم عام مثلث کے لئے ترقیم

۲س = ۲π − ا − ب − ج، ۲ش = ۲π − عہ − بہ − جہ

۲سَ = − ا + ب + ج، ۲شَ = − عہ + بہ + جہ

۲سً = ا − ب + ج، ۲شً = عہ − بہ + جہ

۲سٓ = ا + ب − ج، ۲شٓ = عہ + بہ − جہ

استعمال کرتے ہیں تو ہمیں فوراً یہ معلوم ہوتا ہے کہ مذکورۂ بالا نامساواتوں کے جواب میں آٹھ قسم کے عام مثلثوں کے ضلعوں اور زاویوں کو ترتیب وار جن نامساواتوں کو پورا کرنا چاہیے وہ حسب ذیل جدولوں میں ظاہر کی گئی ہیں۔

جدول (۲)

س‴	س″	س′	س	
$0 \leqslant$	$0 \leqslant$	$0 \leqslant$	$0 \leqslant$	(۱)
$2\pi \geqslant$	$2\pi \geqslant$	$0 \geqslant$	$0 \geqslant$	(۲)
$2\pi \geqslant$	$0 \geqslant$	$2\pi \geqslant$	$0 \geqslant$	(۳)
$0 \geqslant$	$2\pi \geqslant$	$2\pi \geqslant$	$0 \geqslant$	(۴)
$0 \leqslant$	$0 \leqslant$	$2\pi \leqslant$	$2\pi - \leqslant$	(۵)
$0 \leqslant$	$2\pi \leqslant$	$0 \leqslant$	$2\pi - \leqslant$	(۶)
$2\pi \leqslant$	$0 \leqslant$	$0 \leqslant$	$2\pi - \leqslant$	(۷)
$2\pi \geqslant$	$2\pi \geqslant$	$2\pi \geqslant$	$2\pi - \geqslant$	(۸)

(۲۴۸)

جدول (۳)

ش‴	ش″	ش′	ش	
$0 \leqslant$	$0 \leqslant$	$0 \leqslant$	$0 \leqslant$	(۱)
$0 \leqslant$	$0 \leqslant$	$2\pi \leqslant$	$2\pi - \leqslant$	(۲)
$0 \leqslant$	$2\pi \leqslant$	$0 \leqslant$	$2\pi - \leqslant$	(۳)
$2\pi \leqslant$	$0 \leqslant$	$0 \leqslant$	$2\pi - \leqslant$	(۴)
$0 \leqslant$	$0 \leqslant$	$2\pi \leqslant$	$2\pi - \leqslant$	(۵)
$0 \leqslant$	$2\pi \leqslant$	$0 \leqslant$	$2\pi - \leqslant$	(۶)
$2\pi \leqslant$	$0 \leqslant$	$0 \leqslant$	$2\pi - \leqslant$	(۷)
$0 \leqslant$	$0 \leqslant$	$0 \leqslant$	$0 \leqslant$	(۸)

۳۱۲ — ابتک ہم نے صرف آٹھ مثلثوں پر غور کیا ہے جنکے راس دئے ہوئے ہیں۔ دوسرے آٹھ مثلث اُس جہت کو اُلٹ دینے سے

حاصل ہوتے ہیں جس میں کرہ کی سطح پر کے کسی نقطہ کے گرد کے زاویے مثبت شمار کئے گئے ہیں یہ عمل درحقیقت ۲ π − عہ، ۲ π − بہ، ۲ π − جہ کو عہ، بہ، جہ کی بجائے رکھنے کے معادل ہے۔

پس ہمیں حسب ذیل روابط ملتے ہیں جن میں زبر زدہ لاحقے دوسرے جٹ کے آٹھ مثلثوں کے تعلق کو ظاہر کرتے ہیں۔

$$\left.\begin{array}{l} \bar{ش}_ر = -\pi - ش_ر \text{ ، } \bar{ش}'_ر = \pi - ش'_ر \\ \bar{ش}''_ر = \pi - ش''_ر \text{ ، } \bar{ش}'''_ر = \pi - ش'''_ر \end{array}\right\} \quad (ر = ۱، ۲، \ldots، ۸)$$

اس طرح اس دوسرے جٹ کے مثلثوں کے زاویوں کی نامساواتیں وہی نہیں ہیں جو پہلے جٹ سے متعلق ہیں حالانکہ ضلعوں کی نامساواتیں وہی رہتی ہیں۔ اس دوسرے جٹ کے مثلثوں کے زاویوں کی نامساواتیں جدول ذیل سے معلوم ہو سکتی ہیں۔

جدول (۴) (۲۲۹)

	$\bar{ش}$	$\bar{ش}'$	$\bar{ش}''$	$\bar{ش}'''$
(۱̄)	$\gtrless -\pi$	$\gtrless \pi$	$\gtrless \pi$	$\gtrless \pi$
(۲̄)	$\gtrless ۰$	$\gtrless ۰$	$\gtrless \pi$	$\gtrless \pi$
(۳̄)	$\gtrless ۰$	$\gtrless \pi$	$\gtrless ۰$	$\gtrless \pi$
(۴̄)	$\gtrless ۰$	$\gtrless \pi$	$\gtrless \pi$	$\gtrless ۰$
(۵̄)	$\gtrless ۰$	$\gtrless ۰$	$\gtrless \pi$	$\gtrless \pi$
(۶̄)	$\gtrless ۰$	$\gtrless \pi$	$\gtrless ۰$	$\gtrless \pi$
(۷̄)	$\gtrless ۰$	$\gtrless \pi$	$\gtrless \pi$	$\gtrless ۰$
(۸̄)	$\gtrless -\pi$	$\gtrless \pi$	$\gtrless \pi$	$\gtrless \pi$

۱۴۳ — ان مثلثوں میں سے کسی ایک کے قطبی مثلث کو ہم اس طرح پہچان سکتے

ہیں کہ قطبی مثلث کے زاویے اور ضلع نامساواتوں کے اسی جٹ کو پورا کرینگے جن کو اصلی مثلث کے ضلع اور زاویے علی الترتیب پورا کرتے ہیں۔ مثلاً اگر ہم مثلث (۳) کو لیں تو اس کے قطبی مثلث کے زاویوں کو وہ نامساواتیں پوری کرنی چاہئیں جو جدول (۲) میں تیسرے خط کے جواب میں ہیں۔ زاویوں کی جدولوں میں ان نامساواتوں کو دیکھنے سے یہ پتہ چلیگا کہ جدول (۴) کے تیسرے اور چھٹے خطوں میں یہ نامساواتیں مندرج ہیں۔ پس قطبی مثلث (۳َ) کے نمونہ کا یا (۶َ) کے نمونہ کا ہے۔ پھر چونکہ مثلث (۳) کے زاویے جدول (۳) کی نامساواتوں میں تیسرے خط کی نامساواتوں کو پورا کرتے ہیں اس لئے اس کے قطبی مثلث کے ضلع ان نامساواتوں کو پورا کرینگے اور ان کو ہم صرف جدول (۲) کے چھٹے خط میں پاتے ہیں جو (۶) اور (۶َ) کے نمونوں سے متعلق ہے پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ نمونہ (۳) کے مثلث کا قطبی مثلث نمونہ (۶َ) کا ایک مثلث ہے۔

۳۱۴ – اساسی ضابطے۔ جیب التمامی ضابطے جو تیسرے باب میں مشروط کردی مثلث کے لئے ثابت کئے گئے تھے نئی ترقیم کو اختیار (۲۵۰)
کرنے سے شکل ذیل میں رکھے جا سکتے ہیں۔

جم ا = جم ب جم ج – جب ب جب ج جم عہ
جم ب = جم ج جم ا – جب ج جب ا جم بہ ....(۲)
جم ج = جم ا جم ب – جب ا جب ب جم جہ

اب فرض کرو کہ مقادیر اَ، بَ، جَ، عہَ، بہَ، جہَ ان رشتوں کو پورا کرتے ہیں اور ہم درج کرتے ہیں

ا = ۲π – اَ ، ب = بَ ، ج = جَ
عہ = عہَ ، بہ = بہَ – π ، جہ = جہَ – π ....(۳)

تو ہمیں معلوم ہوگا کہ زبر زدہ حروف سے تعبیر ہونیوالی مقداریں ٹھیک اسی قسم کے رشتوں کو پورا کرتی ہیں۔ یعنے ضوابط (۲) میں (۳) سے اندراجات کرنے سے

ضوابط (۲) غیر متغیر رہتے ہیں۔

اب ہم جانتے ہیں کہ ضوابط (۲) اُن مثلثوں کے لئے درست ہیں جو نمونہ (۱) سے متعلق ہیں اور ہم نے دیکھا ہے کہ مثلثات (۲)، (۳) اور (۴) کے عناصر مثلث (۱) اور دوسرے دو متشاکل مثلثوں کے عنصروں میں (۳) سے اندراجات کرنے سے حاصل کئے جاتے ہیں۔ اس لئے ضابطے (۲) مثلثات (۲)، (۳)، (۴) کے لئے درست ہیں۔

اور چونکہ مثلثات (۲)، (۳)، (۴) سے مثلثات (۵)، (۶)، (۷) بالکل وہی اندراجات سے اخذ کئے جا سکتے ہیں اور مثلث (۸) موخرالذکر تین مثلثوں میں سے کسی ایک سے اخذ کیا جا سکتا ہے، اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مثلثوں (۱)، (۲)، (۳)، ..... (۸) کیلئے ضوابط (۲) درست ہیں۔

مزید برآں یہ ضابطے نہیں بدلتے جبکہ عہ، بہ، جہ کی بجائے علی الترتیب ۲ π - عہ، ۲ π - بہ، ۲ π - جہ رکھا جاتا ہے اس لئے یہ ضابطے، مثلثوں (اَ)، (۲َ)، (۳َ)، ..... (۸َ) کے لئے بھی درست ہیں۔

پس جیب التمامی ضابطے عام کروی مثلث کے لئے بھی صادق آتے ہیں۔

۳۱۵ — ضوابط

جم عہ = جم بہ جم جہ - جب بہ جب جہ جم ا
جم بہ = جم جہ جم عہ - جب جہ جب عہ جم ب ..... (۴)
جم جہ = جم عہ جم بہ - جب عہ جب بہ جم ج

کے لئے بھی اسی طرح کا ثبوت اختیار کیا جا سکتا ہے۔ (۳) سے درج کرنے سے
۲۵ یہ ضابطے غیر متغیر رہتے ہیں اور اس لئے جب نمونہ (۱) کے مثلثوں کے لئے ان کا درست ہونا ثابت ہے تو عام مثلث کی سولہ قسموں کے لئے بھی یہ ضابطے اسی طرح درست ہیں۔

۳۱۶ — یہی استدلال جیبی ضابطوں

$$\frac{\text{جب ا}}{\text{جب عہ}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{جب بہ}} = \frac{\text{جب ج}}{\text{جب جہ}} \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

پر بھی حاوی ہے اور ان ضابطوں کی تعمیم قائم ہو سکتی ہے اور اس لئے اُن ضابطوں کی بھی جو ان ضابطوں سے ماخوذ ہیں یعنے

۲ ن = جبا ب جبا ج جبا عہ = جبا ج جب ا جبا بہ
= جب ا جبا ب جب جہ
۲ ن = جبا بہ جب جہ جبا ا = جبا جہ جبا عہ جب ب ....(۶)
= جبا عہ جبا بہ جبا ج

اور

۴ ن^{2} = ۴ جبا س جبا سَ جب سً جب سٌ
= ۱ - جم^{2} ا - جم^{2} ب - جم^{2} ج + ۲ جم ا جم ب جم ج
۴ ن^{2} = ۴ جبا ثہ جبا ثہَ جب ثہً جب ثہٌ ....(۷)
= ۱ - جم^{2} عہ - جم^{2} بہ - جم^{2} جہ + ۲ جم عہ جم بہ جم جہ

۳۱۷ — دفعہ ۹۴ کے مماس التمامی ضابطے اور نمونہ

جبا ا جم ب + جبا ج جم بہ + جم ا جبا ب جم جہ = ۰
جبا ا جم ج + جبا ب جم جہ + جم ا جبا ج جم بہ = ۰ ....(۸)

کے ضابطے (جن پر دفعہ ۵۳ میں بحث ہو چکی ہے) بھی عام مثلث کی صورت میں درست ہیں کیونکہ یہ سب ضابطے جیبی اور جیب التمامی ضابطوں سے ماخوذ ہیں۔

۳۱۸ — اس طرح مشروط مثلث کے تمام **اساسی ضابطے** عام مثلث کی سولہ قسموں کے لئے بھی صادق آتے ہیں۔

۳۱۹ — **ڈلمبر کی تمثیلات** ۔ اُن ضابطوں کی تعمیم میں جنہیں انکی انتہائی شکل میں یا اساسی ضابطوں سے ان کو اخذ کرتے وقت جذر المربع نکالنے کا عمل شامل ہو ہیں بہت احتیاط کے ساتھ مبہم علامت کا خیال رکھنا پڑے گا۔ کیونکہ یہ یاد ہو گا کہ مشروط مثلث کی صورت میں علامت کا

انتخاب ایسے حدود پر غور کرنے سے متعین ہو جاتا تھا جو عناصر پر اختیاری طور پر عائد
(۲۵۲) کی گئی تھیں۔ (مثلاً دیکھو دفعہ ۵۶)۔ اب چونکہ عام مثلث کی ۱۶ قسموں
کے لئے اُن کے عناصر کی قیمتوں کے قیود مختلف ہیں اس لئے ہمیں علامتوں
میں اختلاف کی توقع رکھنی چاہیئے۔

۳۲۰ — ضوابط (۲) سے جو عام مثلث کے لئے درست ثابت کئے گئے
ہیں نتائج ذیل فوراً اخذ کئے جا سکتے ہیں:-

$$\left.\begin{aligned}
&\text{جب}^{2}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ع} = \frac{\text{جب سَ جب سً}}{\text{جب ب جب ج}}\text{،}\quad \text{جم}^{2}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ع} = \frac{\text{جب س جب سٌ}}{\text{جب ب جب ج}}\text{،}\\
&\text{جب}^{2}\,\tfrac{1}{2}\,\text{بہ} = \frac{\text{جب سٌ جب سً}}{\text{جب ج جب ا}}\text{،}\quad \text{جم}^{2}\,\tfrac{1}{2}\,\text{بہ} = \frac{\text{جب س جب سَ}}{\text{جب ج جب ا}}\text{،}\\
&\text{جب}^{2}\,\tfrac{1}{2}\,\text{جہ} = \frac{\text{جب سٌ جب سَ}}{\text{جب ا جب ب}}\text{،}\quad \text{جم}^{2}\,\tfrac{1}{2}\,\text{جہ} = \frac{\text{جب س جب سً}}{\text{جب ا جب ب}}\text{،}
\end{aligned}\right\}\dots(۹)$$

اور پھر ہم (۹) سے اخذ کرتے ہیں

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\,\text{بہ}\;\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{جہ}}{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ع}} = \sqrt{\frac{\text{جب}^{2}\,\text{سً}}{\text{جب}^{2}\,\text{ا}}}\\
&\frac{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{بہ}\;\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\,\text{جہ}}{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ع}} = \sqrt{\frac{\text{جب}^{2}\,\text{سٌ}}{\text{جب}^{2}\,\text{ا}}}
\end{aligned}\right\}\dots\dots(۱۰)$$

اب ان دو جملوں میں جن مخصوص جذر المربعوں کا انتخاب کرنا ہے
وہ ایک دوسرے پر غیر منحصر نہیں ہیں۔ چنانچہ اگر قبل الذکر جذر ہو

$$\text{صہ}\,\frac{\text{جب سً}}{\text{جب ا}}\text{،}\quad (\text{صہ} = \pm 1)$$

تو موخر الذکر جذر ہونا چاہئے

$$\text{صہ}\,\frac{\text{جب سٌ}}{\text{جب ا}}$$

کیونکہ اگر ہم موخر الذکر جذر کو

$$\text{صہ}\ \frac{\text{جب ٹ}}{\text{جب ا}}\ ،\ (\text{صہ} = \pm 1)$$

سے تعبیر کریں تو عمل ضرب سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{\text{جب ب جب ج}}{\text{۴ جب}^{2}\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ}} = \text{صہ صہَ}\ \frac{\text{جب ٹ جب ٹَ}}{\text{جب}^{2}\,\text{ا}}$$

جو ضوابط (۹) اور (۱۰ أ) کی رو سے

$$\text{جب}^{2}\text{ا جب ب جب ج جب ب جب ج} = \text{صہ صہَ} \times ۴\ \text{ن}^{2}$$

میں تحویل ہو جائے گا اور اس طرح صہ صہَ = +۱ ۔ اسلئے صہ = صہَ ۔

(۲۵۳ ضوابط (۱۰ أ) کو جمع اور تفریق کرنے سے ہمیں ڈلمبر کی پہلی دو تمثیلات

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{بہ} + \text{جہ})}{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ}} &= \pm\,\frac{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ب} - \text{ج})}{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ا}}\ ،\\
\frac{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{بہ} - \text{جہ})}{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ}} &= \mp\,\frac{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{ب} - \text{ج})}{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ا}}\ ،\\
\frac{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{بہ} + \text{جہ})}{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ}} &= \mp\,\frac{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ب} + \text{ج})}{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ا}}\ ،\\
\frac{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{بہ} - \text{جہ})}{\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ}} &= \pm\,\frac{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{ب} + \text{ج})}{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ا}}\ ،
\end{aligned}\right\}\ \ldots (۱)(\text{۱۱ أ})$$

حاصل ہوتی ہیں۔

۲۱ — ثبوت کے طریقہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ پہلی صف میں اوپر کی علامتیں ایک ساتھ لینی چاہئیں اور نیچے کی علامتیں ایک ساتھ لیکن مزید بریں ضوابط کے پورے جُٹ (۱) میں اوپر کی علامتیں ایکساتھ اور نیچے کی علامتیں ایک ساتھ چلتی ہیں۔ اس کو دیکھنے کے مختلف طریقے ہیں۔ مثلاً ہم داہنی طرف کا پہلا اور تیسرا ضابطہ ایک ساتھ ایسے طریقہ سے اخذ کر سکتے ہیں جو اوپر کی صف کے دو ضابطوں کو

اخذ کرنے میں اختیار کیا جاتا ہے۔ یا ہم ان کا استخراج کر سکتے ہیں اوپر کے ضابطوں کو مساواتوں

$$\frac{\text{جب بہ} \pm \text{جب جہ}}{\text{جب عہ}} = \frac{\text{جب ب} \pm \text{جب ج}}{\text{جب ا}}$$

کی اجزائے ضربی والی شکل کے ساتھ مقابلہ کرنے سے۔ یہ مساواتیں اساسی **جیبی ضابطوں** سے بہ آسانی فوراً حاصل ہو سکتی ہیں۔

۳۲۲ — ضوابط (ل) کے سوا ضابطوں کے اور دو دوسرے جُٹ ہیں جن کو ہم (ب) اور (ج) سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ ضابطوں کے یہ جُٹ (ل) سے حروف ا، ب، ج اور عہ، بہ، جہ کے مُدوّر باہمی تبادلہ (Cyclic interchange) کے ذریعہ حاصل ہوتے ہیں۔ ان میں سے ہر جُٹ میں اوپر کی علامتیں ایک ساتھ اور نیچے کی علامتیں ایک ساتھ حسب ساتوں چلتی ہیں۔

۳۲۳ — علاوہ ازیں اگر ہم ضوابط (ل)، (ب)، (ج) کے تین جُٹوں پر ایک ساتھ غور کریں تو یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ ہمیں یا تو صرف اوپر کی علامتیں لینی چاہئیں یا صرف نیچے کی۔

کیونکہ ڈلمبر کی تمثیلات، اس شکل

$$\frac{و}{لا} = \pm \frac{ما}{ی}$$

کی چار مقداروں کے درمیان روابط ہیں۔ اگر ہم ان کو شکل

$$\frac{و - لا}{و + لا} = \frac{ما \mp ی}{ما \pm ی}$$

میں رکھیں تو ضوابط (ل) سے، جب ہم اوپر کی علامتیں لیں، (۲۵۴)

مس $\frac{ثہ}{۲}$ مس $\frac{ثہ'}{۲}$ = مس $\frac{یہ}{۲}$ مس $\frac{یہ'}{۲}$ ، مس $\frac{ثہ}{۲}$ مم $\frac{ثہ''}{۲}$ = مم $\frac{یہ''}{۲}$ مس $\frac{یہ''}{۲}$ (ل)
مس $\frac{ثہ}{۲}$ مم $\frac{ثہ'}{۲}$ = مم $\frac{یہ}{۲}$ مس $\frac{یہ'}{۲}$ ، مس $\frac{ثہ'}{۲}$ مس $\frac{ثہ''}{۲}$ = مس $\frac{یہ'}{۲}$ مس $\frac{یہ''}{۲}$ (۱۲)

اور، جب ہم نچلی علامتیں لیں،

(۱۴)(ا)

س ش/۲ س ش′/۲ = م ب′/۲ م ب″/۲ ، س ش″/۲ م ش‴/۲ = س ب″/۲ م ب‴/۲

س ش/۲ م ش′/۲ = س ب/۲ م ب′/۲ ، س ش″/۲ س ش‴/۲ = م ب/۲ م ب′/۲

حاصل ہونگے۔

اب اگر متناظر ضوابط (ب) اور (ج) بنائے جائیں تو یہ فوراً معلوم ہو جائے گا کہ ہم (ا)، (ب)، (ج) جٹوں میں سے کسی ایک میں اوپر کی علامت اور اس کے ساتھ کسی دوسرے جٹ میں نیچے کی علامت نہیں لے سکتے۔

۳۲۴ — واجب مثلثوں سے مراد وہ مثلث ہیں جن کے لئے ڈلمبر کی تمثیلات میں اوپر کی علامتیں لی جانی چاہئیں اور **غیر واجب مثلثوں** سے وہ مثلث مراد ہیں جنکے لئے نیچے کی علامتیں لیجانی چاہئیں۔

۳۲۵ — س ½ (ب ± ج) وغیرہ کے لئے نیپیر کے ضابطے جو ڈلمبر کی تمثیلات سے بذریعہ عمل تقسیم حاصل کئے جا چکے ہیں غیر واجب مثلثوں کے لئے بھی وہی ہیں اور واجب مثلثوں کے لئے بھی وہی۔

۳۲۶ — واجب مثلثوں کے تمام مثلثی ضابطے دراصل دو جماعتوں میں تقسیم ہو سکتے ہیں۔ ایک میں وہ ضابطے ہیں جو واجب اور غیر واجب دونوں قسم کے مثلثوں کے لئے برابر درست ہیں اور دوسرے میں وہ جو صرف واجب مثلثوں کے لئے درست ہیں۔ پہلی جماعت کے ضابطوں کی بنیاد جیبی اور جیب التمامی ضابطوں پر؛ اور دوسری جماعت کے ضابطوں کی بنیاد ڈلمبر کی تمثیلات پر ہوتی ہے۔ ان اصل ضابطوں سے ایک ہی جماعت کے دوسرے سب ضابطے غیر مبہم اعمال کے ذریعہ حاصل ہو سکتے ہیں اور

(۲۵۵)

اسی طرح ہم دوسری جماعت کے ضابطوں سے پہلی جماعت کے ضابطے اخذ کر سکتے ہیں۔ لیکن پہلی جماعت کے ضابطوں سے دوسری جماعت کے ضابطوں کو حاصل کرنے میں جذر المربع کی علامت کی تعیین کرنی پڑتی ہے یعنے دو علامتوں میں سے ایک کا انتخاب درپیش ہوتا ہے۔

۳۲۷ — یہ دیکھنا آسان ہے کہ ڈلمبر کی تمثیلات میں اوپر کی علامتیں وہ ہیں جن کو اس مثلث کے لئے لینا چاہئے جس کے زاوئے اور ضلع π سے چھوٹے ہیں۔ اور فی الواقعی یہ معلوم ہوگا کہ (۱)، (۲)، (۳)، (۴) کے نمونہ کے مثلث واجب مثلثات ہیں اور (۵)، (۶)، (۷)، (۸) کے نمونہ کے غیر واجب۔

۳۲۸ — نیز اگر ہم مثلث کے ایک واحد ضلع یا ایک واحد زاوئے میں ۲ π کا اضافہ کریں تو اس سے ڈلمبر کی تمثیلات میں علامتیں بدل جائیں گی یہ بات اسوقت اہم ہوگی جب ہم اپنی بحث کو اتنی وسعت دینا چاہیں کہ اس میں وہ مثلث بھی شامل ہو جائیں جن کے ضلع اور زاوئے ۲ π سے کم ہونے کی قید سے آزاد ہیں۔ اس سے اُس صریح واقعہ کو تقویت پہنچتی ہے کہ وہ زاوئے جنمیں باہم ۲ π کے ضعفوں کا فرق ہے اُسوقت تک مماثل گردانے جا سکتے ہیں جب تک کہ خود اُن کے مثلثی تفاعل استعمال ہوتے ہیں لیکن ان کو ایسے جملوں میں مماثل نہیں خیال کیا جا سکتا جہاں انکے تحت ضعفوں کے مثلثی تفاعل استعمال ہوتے ہیں۔

۳۲۹ — ہم نے دیکھا ہے کہ ڈلمبر کی تمثیلات میں سے کسی ایک میں (س) سے اندراج کیا جائے تو علامت میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی اور چونکہ مثلثات (۲)، (۳)، . . . (۸) سب کے سب اس قسم کے ایک یا زیادہ اندراجات کے ذریعہ (۱) سے حاصل ہوتے ہیں اس لئے یہ فرض کیا جا سکتا ہے کہ یہ سب آٹھ مثلث واجب مثلث ہیں۔ لیکن حقیقت حال یہ ہے کہ جب، مثلاً مثلث (۴) میں (ا) سے اندراج کیا جاتا ہے (دیکھو جدول ا) تو ہمیں فوراً مثلث (۶) حاصل نہیں ہو جاتا بلکہ عناصر کا

وہ جٹ جو اس طور پر حاصل ہوتا ہے یہ ہے

ا = ۲π - ا، ب = ب، ج = ۲π - ج،
عہ = π + عہ، بہ = ۲π + بہ، جہ = π + جہ ..... (۱۴)

اور یہ جٹ اُس مثلث کے متناظر ہے جس کا زاویہ بہ، ۲π سے بڑا ہے پس ہمیں اس مثلث کو مقررہ قیدوں کے اندر لانے کے لئے بہ میں سے ۲π تفریق کرنا ہوگا تب کہیں ہم (۶) کے نمونہ کے مثلث پر پہنچ سکتے ہیں۔ یہی وہ
(۲۵۶) ۲π کی تفریق ہے جو اگرچہ اساسی ضابطوں کو غیر متبدل چھوڑتی ہے لیکن ڈلمبر کی تمثیلات میں علامتیں بدل دیتی ہے اور (۶) کے نمونہ کے مثلث کو غیر واجب مثلثوں کی جماعت میں لاتی ہے۔

۳۳۰۔ ڈلمبر کی تمثیلات کا دوسرا ثبوت۔[۱]

جیبی ضابطوں سے

جب بہ جب ا = جب ب جب عہ
جب جہ جب ا = جب ج جب عہ

اور ان سے

(جب بہ - جب جہ) جب ا = (جب ب - جب ج) جب عہ ... (۱۵)
(جب بہ + جب جہ) جب ا = (جب ب + جب ج) جب عہ ... (۱۶)

پھر (۱۰) سے

جب ب جم ج + جب ا جم جہ + جم ب جب ج جم عہ = ۰
جب ج جم ب + جب ا جم بہ + جم ج جب ب جم عہ = ۰

ان کو جمع کرنے سے

(جم بہ + جم جہ) جب ا + جب (ب + ج) (۱ + جم عہ) = ۰ ..... (۱۷)

---

[۱] علم مثلث کروی مصنفہ شاونٹ (Chauvenet) دفعات ۲۵ تا ۲۷،
علم مثلث مصنفہ بالٹزر Baltzer باب دہم دفعہ ۵۔

ہم ربطی (correlative) ضابطہ

جب (بہ + جہ) (۱ + جم اُ) + (جم ب + جم ج) جب عہ = ۰ ... (۱۸)

قطبی مثلث پر غور کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اب اگر ہم مساواتوں (۱۵) ..... (۱۸) میں تمام رقموں کو اجزائے ضربی میں تحلیل کریں اور ان اختصارات

جب ½ (بہ - جہ) جب ½ اُ = ل، جب ½ (ب - ج) جب ½ عہ = لہ،

جم ½ (بہ - جہ) جب ½ اُ = م، جم ½ (ب - ج) جب ½ عہ = مہ،

جب ½ (بہ + جہ) جم ½ اُ = ن، جب ½ (ب + ج) جم ½ عہ = نہ،

جم ½ (بہ + جہ) جم ½ اُ = پ، جم ½ (ب + ج) جم ½ عہ = پہ،

کو کام میں لائیں تو

ل پ = لہ پہ، م ن = مہ نہ
م پ = - نہ پہ، ن پ = - مہ پہ .... (۱۹)

اب آخری دو مساواتوں کو ضرب دینے اور دوسری سے تقسیم کرنے سے (۲۵۷)

پ² = پہ²

پس یا تو پ = پہ .... (۱°)

اور اس کے ساتھ ل = لہ، م = - نہ، ن = - مہ

یا پ = - پہ .... (۲°)

اور اس کے ساتھ ل = - لہ، م = نہ، ن = مہ

یہ روابط ڈلمبر کے ضابطوں کا جٹ (۱) ہیں۔

۳۳۱۔ لولیر (L'Huilier.) کے ضابطے۔ یہ اس جماعت کے ضابطے ہیں جو واجب اور غیر واجب دونوں قسم کے مثلثوں کے لئے وہی نہیں ہیں۔ واجب مثلثوں کے لئے ان کو (۱۲) سے اخذ کیا جاتا ہے اور پھر ایک نئے حرف کے داخل کرنے سے ان کو سادہ صورت میں لایا جاتا ہے۔ اس طرح ہمیں روابط ذیل حاصل ہوتے ہیں

جنمیں سے پہلے ربط کو ل کی تعریف سمجھنی چاہیے :-

مس ثہ/۲ مس ثہَ/۲ مس ثہً/۲ مس ثہٌ/۲ = ل^۲
= مس ہپ/۲ مس ہپَ/۲ مس ہپً/۲ مس ہپٌ/۲ ...... (۲۰)

مس ہپ/۲ مس ثہ/۲ مس ہپَ/۲ مس ثہَ/۲ = لَ^۲
مس ہپً/۲ مس ثہً/۲ مس ہپٌ/۲ مس ثہٌ/۲ = لً^۲ ...... (۲۱)

اور چار دوسرے جو ایک زبری' دو زبری' تین زبری حروف کے مدّور باہمی تبادلہ سے حاصل ہوتے ہیں۔

مس ہپ/۲ مس ثہ/۲ = مس ہپَ/۲ مس ثہَ/۲ = مس ہپً/۲ مس ثہً/۲
= مس ہپٌ/۲ مس ثہٌ/۲ = ل ...... (۲۲)

ل کی تعریف میں جذرالمربع کے نکالنے کا عمل داخل ہے۔

ایسے مثلثوں کے لئے جن کے ضلع اور زاوئے صفر اور π کے درمیان واقع ہوں مثبت جذر لینا ہوگا۔

۲۵۸ غیر واجب مثلثوں کے لئے متناظر نتائج ضوابط (۱۳) سے اخذ کئے جاسکتے ہیں۔

۲۳۳ - جس طالب علم کو علم مثلث کروی کے وسیع تر مفاہیم سے دلچسپی ہو اور جو ریاضیات نظری کی دوسری شاخوں سے اسکا تعلق دریافت کرنا چاہے اس کے لئے حوالہ جات ذیل مفید ثابت ہونگے۔

E. Study "*Spharische Trigonometrie, etc.*," *Abhandlungen der Kön. Säch. Gesellschaft der Wiss. zu Leipzig*, XX, 1893.

Mathematical Report to the International Cangress at Chicago, 1893.

"*Mathematische Mitteilungen.*" *Verhandlungen der Kon. Sach. Gesellschaft der Wiss. zu Leipzig* 1895, p. 532.

"*Some Researches in Spherical Trigonometry,*" *Papers published by The American Mathematical Society*, I, 1896, p. 382.

MRS. G. CHISHOLM YOUNG, *Algebraisch gruppentheoretische Untersuchungen zur spharischen Trigonometrie,* Gottingen 1895.

Sulla varieta razionale normale $M_3{}^4$ *di* S_6 *rapprcsentante della trigonometria sferica,*" *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino,* XXXIV, 1899, p 587.

F. KLEIN, *Vorlesungen uber die hypergeometrische Function,* Gottingen, 1894, p. 285 *et seq.*

Vorlesungen uber die nicht-Euklid'sche Geometrie, Gottingen, 1893, Vol, I, p. 11; Vol. II, p. 169.

F. MEYER, "*Der Resultantenbegriff in der spharischen Trigonometrie,*" *Crelle's Journal,* CXV, p. 209.

"*Die Resultantenbildungen der Trigonometric,*" *Jahresbericht der Deut. Math. Vereinigung,* IV, 1894-5, p. 92.

O. PUND, "*Ueber Substitutionsgruppen in der spharischen Trigonometrie, inbesondere die Neperschen Regeln fur die rechtwinklige sphäritschen Dreiecke,*" *Mitteilungen der Math Gesell. in Hamburg,* III, 1897-8, p 290.

R. F. MUIRHEAD, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 1894-5, p. 129.

STEPHANOS, "*Sur la relation qui existe entre le probleme de la trigonametrie spherique et la theorie du systeme de trois formes biquadratiques binaires,*" *Bulletin de la Societe mathematique de France,* X, 1882, p. 134.

DZIOBEK, "*Ueber eine Erweiterung des Gauss'schen Pentagramma mirificum auf ein beliebiges spharischen Dreieck,*" *Grunert's Archiv,* XIX, XX.

(۲۵۹)

بیسواں باب

علم ہندسہ کروی میں مقطعات کا استعمال

۳۳۳ ۔ سہ قائمی مثلث کے لحاظ سے عمادی محدد ۔

ایک مثلث کے لحاظ سے عمادی محددوں کا استعمال، جنکی تعریف دفعہ ۱۶۲ میں ہوئی ہے، علم ہندسہ کروی میں ایک تحلیلی طریقہ کو ممکن بنا دیتا ہے جو علم ہندسہ مستوی میں سہ خطی محددوں کے طریقہ کے مماثل ہے ۔

اس مقصد کے لئے بہتر ہوگا کہ ہم ایسے مثلث کو حوالہ کا مثلث لیں جس کے تینوں ضلع ربعات ہیں اور اس لئے جس کے تینوں زاوئے قائمہ ہیں ۔ اس قسم کے مثلث کو ہم ․․ سہ قائمی مثلث کہیں گے ۔ اسکے خاص خاص خواص سترھویں باب میں زیر بحث آچکے ہیں ۔ ایسے مثلث میں ہر راس اپنے مقابل کے ضلع کا قطب ہوتا ہے اور اس لئے وہ قوس ایک ربع ہوتی ہے جو راس کو مقابل کے ضلع میں کے کسی نقطہ سے ملاتی ہے ۔ اگر ایسا مثلث ا ب ج ہو اور کرہ پر کوئی نقطہ ن ہو اور د، ع، ف وہ نقطے ہوں جہاں ا ن، ب ن، ج ن مثلث کے ضلعوں کو قطع کرتے ہیں (دیکھو دفعہ ۱۶۰ کی شکل) تو ا ن، ب ن، ج ن علی الترتیب ن د، ن ع، ن ف کے متمم ہیں ۔ اس لئے ن کے عمادی محدد جنکی تعریف پہلے جب ن د، جب ن ع، جب ن ف سے کی گئی تھی موجودہ صورت میں جم ا ن، جم ب ن،

جم ج ن ہیں جو دراصل وہی ہیں۔ اِن کو ہم دفعہ ۲۲۷ کی طرح
لہٗ، مہٗ، نہٗ سے تعبیر کرسکتے ہیں۔ وہ طالب علم جس نے ہندسہ مجسمات
تحلیلی کا مطالعہ کیا ہے فوراً پہچان لیگا کہ لہٗ، مہٗ، نہٗ، و ن کی جیوب التمام
ہیں جہاں و کرہ کا مرکز اور و ا، و ب، و ج حوالے کے قائم
محاور ہیں۔

۳۳۴۔ محددوں کے اساسی خواص۔ — قائمی
مثلث کے حوالے سے کسی نقطہ کے تماوی محددوں کی دو خاصیتیں اساسی
ہیں جنکو اس باب میں متواتر استعمال کیا جائے گا۔ (۲۶۰)

(۱) اگر کسی نقطہ ن کے محدد لہٗ، مہٗ، نہٗ ہوں تو

لہٗ^{2} + مہٗ^{2} + نہٗ^{2} = ۱ .... (۱)

(۲) اگر کسی دو نقطوں ن اور نَ کے محدد لہٗ، مہٗ، نہٗ اور لہٗ، مہٗ، نہٗ
ہوں تو

لہ لہٗ + مہ مہٗ + نہ نہٗ = جم ن نَ .... (۲)

اِن مسئلوں کے ثبوت دفعات ۲۶۹ اور ۲۷۰ میں دئے جا چکے ہیں۔

۳۳۵۔ حوالے کے مثلث سے متعلق مفروضہ۔ — دسویں اور
انیسویں ابواب میں جہت (Sense) سے متعلق ایک قرارداد کا تجویز کرنا
ضروری معلوم ہوا تاکہ اس جہت میں کرہ کی سطح پر قوسوں کے درمیانی
زاوئے مثبت شمار کئے جاسکیں۔ ایسی ہی قرارداد چودہ باب میں
بھی ضروری ہے اور اس کے ساتھ ہمیں اس مفروضہ کو بھی مان لینا
ہوگا کہ حوالہ کا مثلث ایسا ہے کہ ایک نقطہ ا سے ب تک، پھر
ب سے ج تک، اور پھر ج سے ا تک ضلعوں پر حرکت کرتے
ہوئے مثلث کے گرد مقررہ مثبت جہت میں چکر لگاتا ہے۔
گذشتہ کی طرح ہم مثبت جہت اس کو قرار دیں گے جو کرہ کے
بیرونی جانب کھڑے ہوئے شخص کو مخالف سمت ساعت نظر آئے۔

۳۳۶ - چھوٹے دائروں سے متعلق قرارداد۔ دفعہ ۲۰۱ میں اس ابہام کا اشارہ کردیا گیا تھا جو چھوٹے دائرہ کے تخیل سے متعلق ہے۔ دائرہ کو تحلیلی طور پر استعمال کرنے میں یہ ضروری ہے کہ ایک ایسی قرارداد تجویز کیجائے جس سے اس قسم کا ابہام کُلّاً رفع ہو۔

دائرہ کے قطب دو ہوتے ہیں اور ان کے جواب میں کروی نصف قطروں کی دو لا متناہیاں ہیں جو عہ + ۲ م π اور ب + ۲ ن π سے تعبیر ہوتی ہیں جہاں م اور ن کوئی صحیح اعداد ہو سکتے ہیں اور عہ، π سے چھوٹی قوسوں کو تعبیر کرتے ہیں جو دائرہ کے ایک نقطہ کو قطبوں سے ملاتی ہیں۔ اگر ہم ایسے نصف قطروں کو خارج کردینا چاہیں جو π سے بڑے ہیں تو پھر بھی دو قطب اور دو نصف قطر عہ اور یہ (ایک دوسرے کے تکملے) ہوں گے۔

ہر دائرہ کے لئے ہم اختیاری طور پر ایک سمت یا جہت مقرر کریں گے تاکہ اس سمت یا اس جہت میں اس کو کھینچا ہوا فرض کیا جا سکے۔ اب وہ قطب دائرہ کا قطب قرار پائے گا جو اس شخص کے بائیں طرف واقع ہو جو کرہ کے بیرونی جانب دائرہ پر مقررہ سمت میں چل رہا ہے۔ دائرہ کا نصف قطر وہ قوس ہوگی جو اس کے قطب کو دائرہ کے کسی نقطہ سے ملاتی ہے۔ دائرہ کرہ کی سطح کو دو حصوں میں تقسیم کرے گا۔ ان دو حصوں میں سے جس حصہ میں قطب واقع ہوگا اس کو ہم دائرہ کا "اندرون" کہیں گے خواہ یہ حصہ نصف کرہ سے بڑا ہو یا چھوٹا۔ (۲۶۱)

بہ الفاظ دیگر چھوٹے دائرہ کا کروی نصف قطر صفر اور π کے درمیان کوئی قیمت اختیار کرسکتا ہے لیکن دائرہ کو ہمیشہ سمجھنا ہوگا ایسا کہ وہ ایسے نصف قطر سے مرتسم ہوا ہے جو قطب کے گرد مخالف سمت ساعت گھومتا ہے اور اس کا سرا جس سمت میں حرکت کرتا ہے وہ دائرہ سے متعلق ہے۔

پس، جب دائرہ کی ایک سمت مقرر کر دیجاتی ہے تو قطب اس سمت کے بائیں جانب واقع ہوتا ہے اور اس کے برعکس اگر قطب مقرر کر دیا جائے تو سمت اس گردش کے جواب میں ہوتی ہے جو قطب کے گرد مخالف سمت ساعت ہے۔

جس طالب علم نے دائروں کے ہم محوری اور ہم پہائی نظاموں کا بغور مطالعہ کیا ہے جو باب (۱۰) میں زیر بحث آچکے ہیں اس کے لئے یہ امتحان کرنا باعث دلچسپی ہوگا کہ دفعہ ہذا کی قرارداد اختیار کرنے سے ان مسائل کو کہانتک وسعت دینے کی گنجائش ہے۔

۳۴۷۔ کروی مماس کی تعریف۔ چھوٹے دائرہ کے کسی نقطہ پر کے کروی مماس سے وہ بڑا دائرہ مراد ہوتا ہے جو چھوٹے دائرہ کے ساتھ معمولی ہندسی تماس رکھے۔ نقطہ تماس پر بڑے دائرہ کی سمت وہی مقرر کیجاتی ہے جو چھوٹے دائرہ کی قرار دیدیگئی ہے۔ بہ الفاظ دیگر اگر بڑا دائرہ اور چھوٹا دائرہ ایک دوسرے کو مس کریں تو چھوٹے دائرہ کا قطب بڑے دائرہ کی بائیں جانب واقع ہوتا ہے۔

اگر دائرے ہندسی تماس رکھیں لیکن ان کی سمتیں ایسی ہوں (۲۶۲)
کہ چھوٹے دائرہ کا قطب بڑے دائرہ کی دائیں جانب واقع ہو تو دائرے ایک دوسرے سے زاویہ π پر ملیں گے اور ہم یہ نہ کہہ سکیں گے کہ یہ دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔

دراصل صرف اس قسم کا تماس جو تعریف میں مضمر ہے ایسا تماس ہے جس کو ہم اندرونی تماس کہہ سکتے ہیں۔ یہاں لفظ "اندرونی" کا استعمال اس مفہوم میں ہوا ہے جو دائرہ کے اندرون کی تعریف کے جواب میں ہے جس کا ذکر دفعہ ماسبق میں ہو چکا ہے۔

۳۴۸۔ دو دائروں کا زاویہ تقاطع۔ اگر دو دائرے ا اور ب

ایک دوسرے کو نقطہ ن پر قطع کریں تو ن پر دائروں کے مماسوں کے درمیانی زاویہ کو جس کی پیمائش ا کے مماس سے ب کے مماس تک گردش کی مثبت جہت میں کی گئی ہو نقطہ ن پر دائروں کا زاویہ تقاطع کہتے ہیں۔

اب چونکہ دو مماسوں میں سے ایک کا انتخاب کرنا ضروری ہے مثلاً وہ جس سے گردش شروع ہوتی ہے اس لئے اس ترتیب کا خیال رکھنا پڑتا ہے جس میں دائروں کے نام واقع ہوتے ہیں۔ عموماً ایسے دائرے جو ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں دو نقطوں' ن اور ق پر قطع کریں گے اور ان نقطوں پر کے زوایائے تقاطع کا مجموعہ ۲ π ہو گا۔

اگر ان دو زوایائے تقاطع کے درمیان تمیز کرنا مطلوب ہو تو ہم یہ دیکھکر ان میں تمیز کر سکتے ہیں کہ نقاط تقاطع میں سے ایک نقطہ تقاطع پر دائرہ ا' دائرہ ب کے اندر داخل ہو رہا ہو گا اور دائرہ ب' دائرہ ا سے خارج ہو رہا ہو گا لیکن دوسرے نقطہ تقاطع پر دائرہ ا دائرہ ب سے خارج ہو رہا ہو گا اور دائرہ ب' دائرہ ا کے اندر داخل ہو رہا ہو گا۔ ہم عام طور پر اس بات پر متفق ہوں گے کہ اصطلاح "دو دائروں کا زاویہ تقاطع" سے اس نقطہ پر کا زاویہ تقاطع مراد ہے جہاں پہلا دائرہ دوسرے سے خارج ہو رہا ہو۔

جب دو دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں تو ان کا زاویہ تقاطع صفر ہوتا ہے۔

اگر دو دائروں کے قطب ا اور ب ہوں اور ان کا نقطہ تقاطع ن تو زاویہ ا ن ب' زاویہ تقاطع کے مساوی ہو گا۔ فرض کرو کہ یہ زاویہ فہ سے اور دائروں کے نصف قطر ر، س سے تعبیر ہوتے ہیں تو مثلث ا ن ب پر جیب التمامی ضابطہ استعمال کرنے سے

جب رجب س جم فہ = جم ا ب - جم ر جم س .... (۳)

۳۴۹ ـ دو دائروں کی باہمی طاقت ـ اگر دو دائروں کے ۲۶۳
قطب ا، ب اور اِن کے کروی نصف قطر ر، س ہوں تو جملہ

جم اب ـ جم ر جم س .... (۴)

کو ہم دائروں کی "باہمی طاقت" کہیں گے ـ

ہندسی مفہوم ـ جب دائرے ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تو ضابطہ (۳) سے یہ بات ظاہر ہے کہ انکی باہمی طاقت، اِن کے نصف قطروں کی جیوب اور زاویہ تقاطع کی جیب التمام کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتی ہے ـ

لیکن جب دائرے قطع نہ کریں تو انکی باہمی طاقت اس مفہوم کی متحمل نہیں ہو سکتی ـ خاص خاص صورتوں میں دوسرے مفہوم معلوم کئے جا سکتے ہیں ـ مثلاً اگر دوسرا دائرہ بڑا دائرہ ہو تو باہمی طاقت جم اب ہے جو جب پ کے مساوی ہے جہاں پ وہ فاصلہ ہے جو ا کے مرکز کو بڑے دائرہ سے ہے اور جسکو ا کے دائرہ کے ایک کروی نصف قطر پر ناپا گیا ہے ـ اگر دونوں دائرے نقطے ہوں تو انکی باہمی طاقت = ۲ جب² ½ اب ہے ـ اگر صرف دوسرا دائرہ نقطہ ہو اور اس نقطہ سے ا کے کروی مماس کا طول تہ ہو تو جم اب = جم ر جم تہ اور باہمی طاقت = ۲ جم ر جب² ½ تہ ہے ـ

اب جو مسائل بیان کئے جائیں گے ان میں سے اکثر مسئلے دائروں کے زوایائے تقاطع کی رقوم میں بیان ہوں گے ـ یہ مسئلے ایسی صورتوں میں بھی صادق آتے ہیں جب دائروں کے چند زوج ایک دوسرے کو قطع نہ کرتے ہوں یا جب چند دائرے نقطے ہوں لیکن جب ایسی صورت پیش آئے تو ان مسائل کو غیر موجود زوایائے تقاطع کی رقوم میں بیان کرنے کی بجائے کروی طاقتوں کی رقوم میں بیان کرنا ضروری ہے جس سے انکے

ہندسی مفہوم بھی مختلف ہو جائینگے ـ

۳۴۰ ـ فرض کرو کہ سم، سن دو دائرے ہیں جن کے کروی نصف قطر رم، رن ہیں اور جن کے قطبوں جم، جن کے عمادی محدد علی الترتیب ہیں

(لام، مام، یام) اور (لان، مان، یان)

تب

جم جم جن = لام لان + مام مان + یام یان

اور اس لئے اگر پ (م ن) باہمی طاقت کو تعبیر کرے تو

پ(م ن) = لام لان + مام مان + یام یان ـ جم رم جم رن ..... (۵)

۳۴۱ ـ باہمی طاقت کا مسئلہ ـ فرض کرو کہ دائروں کے دو (۲۶۴)
نظام ہیں جن میں سے ہر نظام میں پانچ دائرے ہیں یعنی
س۱، س۲، س۳، س۴، س۵ اور س'۱، س'۲، س'۳، س'۴، س'۵ ـ
فرض کرو کہ ان کے نصف قطر، قطب، وغیرہ اسی ترقیم سے تعبیر ہوتے ہیں جو دفعہ ماسبق کے جواب میں ہے ـ

ان دو مقطعات منعدم

۰ ۰ لا۱، ما۱، یا۱، جم ر۱
۰ ۰ لا۲، ما۲، یا۲، جم ر۲
۰ ۰ لا۳، ما۳، یا۳، جم ر۳
۰ ۰ لا۴، ما۴، یا۴، جم ر۴
۰ ۰ لا۵، ما۵، یا۵، جم ر۵

۰ ۰ لا'۱، ما'۱، یا'۱، ـ جم ر'۱
۰ ۰ لا'۲، ما'۲، یا'۲، ـ جم ر'۲
۰ ۰ لا'۳، ما'۳، یا'۳، ـ جم ر'۳
۰ ۰ لا'۴، ما'۴، یا'۴، ـ جم ر'۴
۰ ۰ لا'۵، ما'۵، یا'۵، ـ جم ر'۵

کا حاصل ضرب معلوم کیا جائے تو ہمیں فوراً حسب ذیل اہم نتیجہ حاصل ہوگا

جس کو سب سے پہلے پروفیسر فرابینیس (Frobenius) نے [1] بیان کیا تھا :-

$$\begin{vmatrix} \text{پ(۱ اَ)} & \text{پ(۱ ۲َ)} & \text{پ(۱ ۳َ)} & \text{پ(۱ ۴َ)} & \text{پ(۱ ۵َ)} \\ \text{پ(۲ اَ)} & \text{پ(۲ ۲َ)} & \text{پ(۲ ۳َ)} & \text{پ(۲ ۴َ)} & \text{پ(۲ ۵َ)} \\ \text{پ(۳ اَ)} & \text{پ(۳ ۲َ)} & \text{پ(۳ ۳َ)} & \text{پ(۳ ۴َ)} & \text{پ(۳ ۵َ)} \\ \text{پ(۴ اَ)} & \text{پ(۴ ۲َ)} & \text{پ(۴ ۳َ)} & \text{پ(۴ ۴َ)} & \text{پ(۴ ۵َ)} \\ \text{پ(۵ اَ)} & \text{پ(۵ ۲َ)} & \text{پ(۵ ۳َ)} & \text{پ(۵ ۴َ)} & \text{پ(۵ ۵َ)} \end{vmatrix} = ۰$$

(۶) ....

۴۲۳ — اگر ایک نظام کا ہر دائرہ دوسرے نظام کے سب دائروں کو قطع کرے اور اگر ہم م ام ، نَ ان کے زاویہ تقاطع کو (م نَ) سے تعبیر کریں تو پ (م نَ) کی بجائے

جب ل م جب ل نَ جم (م نَ)

کا اندراج کرنے سے مسئلہ ذیل حاصل ہوتا ہے :-

$$\begin{vmatrix} \text{جم(۱ اَ)} & \text{جم(۱ ۲َ)} & \text{جم(۱ ۳َ)} & \text{جم(۱ ۴َ)} & \text{جم(۱ ۵َ)} \\ \text{جم(۲ اَ)} & \text{جم(۲ ۲َ)} & \text{جم(۲ ۳َ)} & \text{جم(۲ ۴َ)} & \text{جم(۲ ۵َ)} \\ \text{جم(۳ اَ)} & \text{جم(۳ ۲َ)} & \text{جم(۳ ۳َ)} & \text{جم(۳ ۴َ)} & \text{جم(۳ ۵َ)} \\ \text{جم(۴ اَ)} & \text{جم(۴ ۲َ)} & \text{جم(۴ ۳َ)} & \text{جم(۴ ۴َ)} & \text{جم(۴ ۵َ)} \\ \text{جم(۵ اَ)} & \text{جم(۵ ۲َ)} & \text{جم(۵ ۳َ)} & \text{جم(۵ ۴َ)} & \text{جم(۵ ۵َ)} \end{vmatrix} = ۰$$

(۷) ....

---

[1] G. Frobenius, "*Anwendungen der Determinantentheorie auf die Geometrie des Masses*," Crelle's *Journal*, LXXIX, 1875 p. 187. See, however, Cayley, *Camb. Math. Journal*, II, 1841, p. 267, or *Collected Works* Vol. I, p. I.

۳۴۳ - علی القوائم تراش کی صورتیں - اگر نظام اول کے پہلے چار دائروں کو ایک ہی دائرہ ثہ علی القوائم قطع کرے اور اگر ہم ثہ کو نظام دوم کا پانچواں دائرہ لیں تو ضابطہ (۷) میں آخری ستون کے پہلے چار عناصر معدوم ہوتے ہیں۔ پس ہمیں زاویوں کے درمیان (۲۶۵) ربط ذیل حاصل ہوتا ہے جبکہ چار دائروں کا ایک نظام جن کو ایک مشترک دائرہ علی القوائم قطع کرتا ہے کسی دوسرے چار دائروں سے ان زاویوں میں قطع ہوں:-

جم (۱ آ)،	جم (۱ ۲َ)،	جم (۱ ۳َ)،	جم (۱ ۴َ)
جم (۲ آ)،	جم (۲ ۲َ)،	جم (۲ ۳َ)،	جم (۲ ۴َ)
جم (۳ آ)،	جم (۳ ۲َ)،	جم (۳ ۳َ)،	جم (۳ ۴َ)
جم (۴ آ)،	جم (۴ ۲َ)،	جم (۴ ۳َ)،	جم (۴ ۴َ)

= ۰ (۸)

اگر ثہ، وہ دائرہ ہو جو سَ۱، سَ۲، سَ۳ کو علی القوائم قطع کرتا ہے اور اگر ثہ، ثہَ کو علی القوائم قطع کرے تو ہم ثہ، کو پہلے نظام کا چوتھا دائرہ قرار دے سکتے ہیں۔ ایسی صورت میں ضابطہ (۸) کی آخری صف کے پہلے تین عناصر معدوم ہو جاتے ہیں اور ہمیں تین دائروں کے دو نظاموں کے زوایائے تقاطع کے درمیان ربط ذیل ملتا ہے جبکہ ان دائروں سے متعلق قائم دائرے ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کریں۔-

جم (۱ آ)،	جم (۱ ۲َ)،	جم (۱ ۳َ)
جم (۲ آ)،	جم (۲ ۲َ)،	جم (۲ ۳َ)
جم (۳ آ)،	جم (۳ ۲َ)،	جم (۳ ۳َ)

= ۰ (۹)

اب یہ شرط کہ ثہ اور ثہَ ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کریں حسب ذیل صورتوں میں پوری ہوتی ہے:-

(۱) اگر دوسرے نظام کے دائرے ہم محور ہیں۔ کیونکہ ہم محور نظام کے سب دائروں کو علی القوائم قطع کرنے والے دائروں کی لامتناہی تعداد میں ہمیشہ ایک دائرہ ہوتا ہے ایسا جو دوسرے دئے ہوئے دائرہ کو جیسے ثہ ہے علی القوائم قطع کرتا ہے۔

(۲) اگر دوسرے نظام کے تین دائروں کے قطب ایک بڑے دائرہ پر واقع ہیں جو ثہ کے قطب میں سے گذرتا ہے۔ کیونکہ ایسی صورت میں ثہ' ہی وہ بڑا دائرہ ہے۔

(۳) اگر ثہ اور دوسرے نظام کے تین دائرے ایک مشترک نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔ کیونکہ ایسی صورت میں ثہ' ہی وہ مشترک نقطہ ہے۔

(۴) اگر دونوں نظاموں کے چھ دائرے ایک مشترک نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔ کیونکہ ثہ اور ثہ' دونوں نقطہ دائرے ہیں جن کا قطب یہ مشترک نقطہ ہے اور پ (ثہ ثہ') معدوم ہوتا ہے

۲۶۶ **۳۴۴ — ایسی شرط معلوم کرنا کہ تین دائرے جنکے قطب ایک بڑے دائرہ پر واقع ہیں ہم محور ہوں۔** دفعہ سابق کی صورت (۱) میں چونکہ ان دائروں میں جو ایک ہم محور نظام کے علی القوائم ہیں ایک دوسرے کے علی القوائم زوجوں کی لامتناہی تعداد شامل ہوتی ہے، اس لئے دوسرے نظام کے تین دائروں کو پہلے نظام کے دائروں پر منطبق کرنا جائز ہے پس تین دائرے جنکے قطب ایک بڑے دائرہ پر واقع ہیں ہم محور ہوں گے اگر

$$\begin{vmatrix} \text{جب}^2 \text{ر}_1 & \text{پ}(۲۱) & \text{پ}(۳۱) \\ \text{پ}(۱۲) & \text{جب}^2 \text{ر}_2 & \text{پ}(۳۲) \\ \text{پ}(۱۳) & \text{پ}(۲۳) & \text{جب}^2 \text{ر}_3 \end{vmatrix} = ۰ \qquad (۱۰)$$

اگر دائرے ایک دوسرے کو قطع کریں تو دائروں کی باہمی طاقتوں کی بجائے جیوب التمام اور فائق عناصر (Leading elements) کی بجائے اکائی کا اندراج ہو سکتا ہے۔ تب حاصل مقطع کے اجزائے ضربی کی شکل ہوگی

جب $\frac{1}{2}$ {(۳۲) ± (۱۳) ± (۲۱)} ......(۱۱)

اس لئے

(۳۲) ± (۱۳) ± (۲۱) = ۲ن π ......(۱۲)

جہاں ن صفر یا ایک صحیح عدد ہے۔ ہندسی مفہوم باعث دلچسپی ہوگا اگر مشترک نقطوں میں سے گذرنے والے تین دائروں کی مختلف شکلوں کا امتحان کیا جائے۔

۳۴۵ ـ تین ہم محور دائروں کو قطع کرنیوالا دائرہ ـ نتیجہ

(۹) کی ایک خاص صورت کے طور پر ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ پہلے نظام کے تین دائرے ہم محور ہیں اور دوسرے نظام کا پہلا اور دوسرا دائرہ علی الترتیب پہلے نظام کے پہلے اور دوسرے دائرہ پر منطبق ہیں۔ تب ہمیں زاویوں فہ$_۱$، فہ$_۲$، فہ$_۳$ کے درمیان ایک ربط ملیگا جہاں فہ$_۱$، فہ$_۲$، فہ$_۳$ وہ زاویے ہیں جن پر کوئی دائرہ س، اِن تین دائروں س$_۱$، س$_۲$، س$_۳$ سے قطع ہوتا ہے۔ وہ ربط یہ ہے

$$\begin{vmatrix} ۱ ، & \text{جم}\,(۲۱) ، & \text{جم فہ}_۱ \\ \text{جم}\,(۱۲) ، & ۱ ، & \text{جم فہ}_۲ \\ \text{جم}\,(۱۳) ، & \text{جم}\,(۲۳) ، & \text{جم فہ}_۳ \end{vmatrix} = ۰ \qquad (۱۳)$$

اس مقطع میں جم فہ$_۱$ کا سر ہے

جم (۲۳) جم (۱۲) ـ جم (۱۳)

جو جب (۲۳) جب (۱۲) کے مساوی ہے کیونکہ (۱۳) = (۲۳) + (۱۲)-
ربط مذکورہ بالا کو پوری طرح پھیلا کر جزو ضربی (۲۱) کو خارج کر دینے سے
ہم اس کو شکل

جب (۳۲) جم فہ۱ + جب (۱۳) جم فہ۲ + جب (۲۱) جم فہ۳ = ۰ (۲۰
(۱۴) ....

میں تحویل کر سکتے ہیں۔

۳۴۶ - اگر دفعہ ماسبق کا دائرہ س۱ ایک نقطہ ہو تو (۱۳) کی
بجائے ہم باہمی طاقت کا متناظر مقطع استعمال کرتے ہیں۔ ہم جانتے
ہیں کہ ایک نقطہ اور ایک دائرہ کی باہمی طاقت - ۲ جم ر جب² ½ تہ
ہے جبکہ تہ اس مماس کا طول ہو جو اس نقطہ سے دائرہ تک کھینچا گیا
ہے۔ اس لئے اگر ہم تین ہم محور دائروں کے مماس ایک نقطہ سے
کھینچیں تو ان مماسوں کے درمیان ربط ہوگا

جب ا۱	پ (۲۱)	جم ر۱ جب² ½ تہ۱	
پ (۲۱)	جب ا۲	جم ر۲ جب² ½ تہ۲	= ۰ (۱۵)
پ (۱۳)	پ (۲۳)	جم ر۳ جب² ½ تہ۳	

اگر نقطہ س۳ پر واقع ہو اور اس لئے تہ۳ = ۰ تو یہ ربط اس واقعہ کا
اظہار کرے گا کہ اگر ایک دائرہ پر کے کسی نقطہ سے دوسرے دو
ہم محور دائروں کے مماس کھینچے جائیں تو ان مماسوں کے نصفوں کی
جیبوں میں مستقل نسبت ہوتی ہے۔ (دیکھو دفعہ (۱۷۷))

۳۴۷ - **پانچ دائروں کے درمیان روابط** - باہمی طاقت
کے مسئلہ میں فرض کرو کہ دائروں کے دونوں جٹ منطبق ہوتے ہیں۔
تب یہ معلوم ہوگا کہ کوئی پانچ دائرے اس ربط

| جب² ر₁ ، پ (۲۱) ، پ (۳۱) ، پ (۴۱) ، پ (۵۱) |
| پ (۱۲) ، جب² ر₂ ، پ (۳۲) ، پ (۴۲) ، پ (۵۲) |
| پ (۱۳) ، پ (۲۳) ، جب² ر₃ ، پ (۴۳) ، پ (۵۳) | = ۰
| پ (۱۴) ، پ (۲۴) ، پ (۳۴) ، جب² ر₄ ، پ (۵۴) |
| پ (۱۵) ، پ (۲۵) ، پ (۳۵) ، پ (۴۵) ، جب² ر₅ |

(۱۶)

کو پورا کرتے ہیں —
اب یہ شرط کہ کسی چار دائروں کو ایک پانچواں دائرہ علی القوائم قطع کرے یہ ہے

| جب² ر₁ ، پ (۲۱) ، پ (۳۱) ، پ (۴۱) |
| پ (۱۲) ، جب² ر₂ ، پ (۳۲) ، پ (۴۲) |
| پ (۱۳) ، پ (۲۳) ، جب² ر₃ ، پ (۴۳) | = ۰ (۱۷)
| پ (۱۴) ، پ (۲۴) ، پ (۳۴) ، جب² ر₄ |

اور یہ شرط کہ کسی چار دائروں کو ایک پانچواں دائرہ مس کرے
(۲۶۸) (جب یہ دائرے ایک دوسرے کو قطع کریں) یہ ہے

| ۰ ، جب² $\frac{1}{2}$ (۲۱) ، جب² $\frac{1}{2}$ (۳۱) ، جب² $\frac{1}{2}$ (۴۱) |
| جب² $\frac{1}{2}$ (۱۲) ، ۰ ، جب² $\frac{1}{2}$ (۳۲) ، جب² $\frac{1}{2}$ (۴۲) | = ۰
| جب² $\frac{1}{2}$ (۱۳) ، جب² $\frac{1}{2}$ (۲۳) ، ۰ ، جب² $\frac{1}{2}$ (۴۳) |
| جب² $\frac{1}{2}$ (۱۴) ، جب² $\frac{1}{2}$ (۲۴) ، جب² $\frac{1}{2}$ (۳۴) ، ۰ |

(۱۸) . . . .

۳۴۸۔ دو دائروں کی متکافی طاقت۔ دائروں س م، س ن کے متکافیوں کی باہمی طاقت صریحاً یہ ہے

جم ج م ج ن - جب ر م جب ر ن ...... (۱۹)

یا لا م لا ن + ما م ما ن + ی م ی ن - جب ر م جب ر ن ..... (۲۰)

اس کو ہم دائروں س م، س ن کی **متکافی طاقت** کہیں گے اور اس کو ر (م ن) سے تعبیر کریں گے۔

اگر دائروں کا ایک مشترک کروی مماس ہو جس کا طول [م ن] ہو تو اس مثلث پر جس کے راس دائروں اور مماس کے قطب ہیں جیب التمامی ضابطہ استعمال کرنے سے ہمیں معلوم ہوگا کہ

ر (م ن) = جم ر م جم ر ن جم [م ن] .... (۲۱)

۳۴۹۔ متکافی طاقتوں کا مسئلہ۔ پانچ دائروں کے دو جٹ لو اور مقطعات منعدم

(۰، لا ۲، ما ۳، ی ۴، جب ر ۵)، (۰، لاَ ۲، ماَ ۳، یَ ۴، - جب رَ ۵)

کو باہم ضرب دو تو مسئلہ ذیل حاصل ہوگا جو فراہنیس کے مسئلہ کے مماثل ہے۔

ر (۱۱َ)	ر (۲۱َ)	ر (۳۱َ)	ر (۴۱َ)	ر (۵۱َ)
ر (۱۲َ)	ر (۲۲َ)	ر (۳۲َ)	ر (۴۲َ)	ر (۵۲َ)
ر (۱۳َ)	ر (۲۳َ)	ر (۳۳َ)	ر (۴۳َ)	ر (۵۳َ)
ر (۱۴َ)	ر (۲۴َ)	ر (۳۴َ)	ر (۴۴َ)	ر (۵۴َ)
ر (۱۵َ)	ر (۲۵َ)	ر (۳۵َ)	ر (۴۵َ)	ر (۵۵َ)

= ۰ ...... (۲۲)

۳۵۰ - اس مسئلہ کی خاص صورتیں خرابینیں کے مسئلہ کی خاص صورتوں کے ٹھیک جواب میں ہیں جو دفعات ماسبق میں زیر بحث آچکی ہیں - ہم ان خاص صورتوں پر اسی طرح کے اعمال سے پہنچ سکتے ہیں اور جن شکلوں میں ان کو بیان کیا جاتا ہے وہ پ کی بجائے ر کے اندراج سے یہ آسانی اخذ ہوسکتی ہیں - تاہم ہندسی مفہومات دونوں صورتوں میں علیحدہ علیحدہ ہیں - کیونکہ مسئلوں کے ایک جیٹ میں زوایائے تقاطع استعمال ہوتے ہیں اور دوسرے جیٹ میں ان کی بجائے مشترک مماسوں کے طول - متکافی طاقتوں سے ماخوذ مسائل درحقیقت باہمی طاقت سے ماخوذ مسائل کے متکافی ہیں - مثلاً اگر ہم دفعہ ۳۴۴ کے ضابطہ (۱۰) میں پ کی بجائے ر اور فایتی عناصر میں جیوب کی بجائے جیوب التمام مندرج کریں تو ہمیں تین دائروں کے ہم پہانگی ہونے کی شرط حاصل ہوگی جن کے قطب ایک بڑے دائرہ پر واقع ہیں - اسی طرح دفعات ۳۴۵ ' ۳۴۶ کے مسئلوں کے جواب میں ہمیں ہم پہانگی دائروں کے خواص معلوم ہونگے - نیز دفعہ ۳۴۷ کی یہ شرط کہ چار دائروں کو پانچواں دائرہ مس کرے اگر متکافی طاقت کے مسئلہ سے اخذ کی جائے تو ہمیں مشترک مماسوں کے نصفوں کی جیوب کے مربعوں میں ضابطہ (۱۸) کے بالکل مشابہ ایک جملہ ملیگا - ڈاکٹر کیسی[1] (Casey) کہتا ہے کہ یہ شرط

$$\text{جب}\ \tfrac{1}{2}[۲۳]\ \text{جب}\ \tfrac{1}{2}[۴۱] \pm \text{جب}\ \tfrac{1}{2}[۱۳]\ \text{جب}\ \tfrac{1}{2}[۴۲]$$

$$\pm\ \text{جب}\ \tfrac{1}{2}[۲۱]\ \text{جب}\ \tfrac{1}{2}[۴۳] = ۰ \qquad (۲۴)$$

[1] دیکھو Proceedings of the Royal Irish Academy, IX, 1866 صفحہ ۳۹۶ -
Darboex, Annales de l'Ecole Normals, 2nd Series, Vol. II, 1872 صفحہ ۳۴۷
اور Forbenius, Loc. Cit. صفحہ ۲۰۷ -

کے مماثل ہے۔ اس نتیجہ سے ہارٹ کا مسئلہ اخذ کیا جا سکتا ہے۔

۳۵۱ ۔ چار نقطے اور چار دائرے۔ اگر س۱، س۲، س۳، س۴ نقطہ دائرے ہوں تو ان کے نصف قطروں کی جیوب معدوم ہوتی ہیں۔ اس لئے مقطعہ (لا۱، ما۱، ی۱، جب ر۱) معدوم ہوتا ہے اگر اس مقطع کو مقطع (لاَ۱، ماَ۱، یَ۱، جب رَ۱) سے ضرب دیں تو چار نقطوں اور چار دائروں کے درمیان ربط مندرجہ ذیل حاصل ہوگا جسمیں متکافی طاقتوں کی بجائے ان نقطوں سے دائروں تک کھینچے ہوئے مماسوں کی جیوب التمام مندرج ہیں

جم [۱۱َ]	جم [۱۲َ]	جم [۱۳َ]	جم [۱۴َ]
جم [۲۱َ]	جم [۲۲َ]	جم [۲۳َ]	جم [۲۴َ]
جم [۳۱َ]	جم [۳۲َ]	جم [۳۳َ]	جم [۳۴َ]
جم [۴۱َ]	جم [۴۲َ]	جم [۴۳َ]	جم [۴۴َ]

= ۰ (۲۴)

۳۵۲ ۔ چار نقطوں کو ملانیوالی قوسوں کے درمیان ربط۔ اس نتیجہ میں فرض کرو کہ سَ۱، سَ۲، سَ۳، سَ۴ نقاط س۱، س۲، س۳، س۴ پر منطبق ہوتے ہیں تو اس ضابطہ سے کرہ پر کے کسی چار نقطوں کو ملانے والی قوسوں کے درمیان ایک ربط حاصل ہوتا ہے اگر ان میں سے تین نقطے مثلث ا ب ج کے راس ہوں اور اگر ان کو چوتھے نقطے سے ملانے والی قوسیں عہ، بہ، جہ تو

۱	جم ج	جم ب	جم عہ
جم ج	۱	جم د	جم بہ
جم ب	جم د	۱	جم جہ
جم عہ	جم بہ	جم جہ	۱

= ۰ (۲۵)

یا ٤ جب^٢ ا جم^٢ ع + ٢ ٤ (جم ب جم ج - جم ا) جم ب جم ج - ہ ن^٢ = ٠.

اگر ا، ب، ج ایک بڑے دائرے پر ہوں تو مثلث ا ب ج ....(٢٦)
کی جیب معدوم ہوتی ہے۔ نیز جیب (ا ± ب ± ج) = ٠ اور مساوات
کی دائیں طرف کا جملہ ٤ جب ا جم ع کا مربع ہوجاتا ہے۔ اس طرح ہمیں
دفعہ ١٤٥ کا مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔

۳۵۳ — دفعہ ١٦٥ کا مسئلہ بھی ربط (٢٤) کی ایک خاص صورت
ہے۔ اگر ہم س۱ اور س̄۱ کو نقطہ ا پر، س۲ اور س̄۲ کو نقطہ ب پر،
س۳ اور س̄۳ کو ج پر، س۴ کو و پر اور س̄۴ کو پ پر منطبق کریں تو یہ
مسئلہ حاصل ہوجائے گا۔

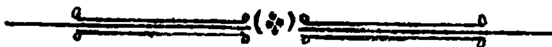
۳۵۴ — اس باب کی بنیاد زیادہ تر فرابینیس کے اس مقالہ پر قائم
کی گئی ہے جسکا تذکرہ دفعہ ۳۴۱ کے حاشیہ میں کیا جا چکا ہے۔ فرابینیس
کے طریقہ سے بہت سے مسائل حاصل ہوتے ہیں جن میں سے صرف
چند ابتدائی مسئلوں کو اس باب میں بیان کیا گیا ہے اور اس لئے
جس طالب علم کو اس مضمون سے دلچسپی ہو اس کو فرابینیس کا اصلی
مقالہ، ڈاکٹر کیسی (Cesey) کا مضمون (جسکا حوالہ دفعہ ۳۵۰ میں ہے)
اور ڈاکٹر آر۔ لاکلان (R. Lachlan) کا مضمون دیکھنا چاہئے جو
Philosophical Transactions of the Royal Secialty
جلد ١٧٧ سنہ ١٨٨٦ میں درج ہے۔

تمت

اشاریہ

علم مثلث کروی

نوٹ :- اعداد سے صفحات کا حوالہ دیا گیا ہے ۔



فہرست اصطلاحات

علم مثلث کروی

Admissible values	قابل قبول قیمتیں
A'fortiori	بالاولیٰ
Alternate segments	متبادلہ مقطوعے
Altitude	ارتفاع
Analogies	تمثیلات
Angle of depression	زاویہ انخفاض
Angle of elevation	زاویہ ارتفاع
Angle of intersection	زاویہ تقاطع
Angles of the same affection	موانس زاویے
Antipodal	تحت قدمی
Antipodes	سمت القدم
Areal coordinates	رقبی محدد
Associated triangles	ائتلافی مثلث
Axial centre	محوری مرکز

Centre of similitude	مشابہت کا مرکز
Chordal triangle	وتری مثلث
Circular parts	دائری اجزاء
Circum-circle	حائط دائرہ
Circumscribed circle	حائط دائرہ، بیرونی دائرہ
Coaxal circle	ہم محور دائرہ
Cogruent triangles	مماثل مثلث
Column	ستون
Colunar	ہم پھانکی
Colunar circle	ہم پھانکی دائرہ
Concurrent	ہم نقطہ
Correlative formula	متضائف ضابطہ، ہم ربطی ضابطہ
Cosine formula	جیب التمامی ضابطہ
Cotangent formula	مماس التمامی ضابطہ
Crossed quadrilateral	چلیپائی چار ضلعی یا ذوا ربعۃ الاضلاع
Curviliniar triangular areas	منحنی الاضلاع مثلثی رقبے
Cyclic interchange	مستدیر مبادلہ
Cyclic order	مستدیر ترتیب
Cyclic quadrilateral	دائری چار ضلعی
Determinants	مقطعات
Diametrically opposite	متقاطر
Dihedral angles	دو سطحی زاویے
Direction cosines	سمتی جیوب التمام
Dedecahedron	بارہ سطحی

Duality	تنویت
Elements	عناصر، اجزاء
Envelope	لفاف
Fundamental formulae	بنیادی ضابطے، اساسی ضابطے
Geodesic	تقسیم الارضی
Geodesy	علم تقسیم الارض
Great circle	بڑا دائرہ
Group-theory	گروہی نظریہ
Harmonic range	موسیقی سعت
Henahedron	شش سطحی
Icosahedron	بیس سطحی
Improper triangles	غیر واجب مثلث
Included side	مشترک ضلع
Induction	استقراء
Inequality	نامساوات
Inscribed circle	اندرونی دائرہ
Jacobian	جیکوبی
Leading elements	فائق عناصر
Lhuilierian	لولیری
Limiting circles	انتہائی دائرے
Limiting points	انتہائی نقطے
Lunar centre	پھانکی مرکز
Lune	پھانک
Mean centre	اوسط مرکز
Median	خط وسطی

Mechanics	علم حیل
Mutual powers	باہمی طاقت
Netwook	جال
Nine-points circle	نونقطی دائرہ
Normal coordinates	عمادی محدد
Norm of the angles	زاویوں کا عمید
Norm of the sides	ضلعوں کا عمید
Oblique-angled triangles	غیر قائم الزاویہ مثلث
Octahedron	آٹھ سطحی
Orthocentre	مرکز عمودی
Orthogonal section	قائم تراش
Orthogonal substitution	قائم ابدال
Parallelepiped	متوازی السطوح
Point circle	نقطہ دائرہ
Point of emergence	نقطہ خروج
Pole	قطب
Polyhedron	کثیر السطوح
Primitive triangle	مثلث ابتدائی
Proper triangles	واجب مثلثات
Quadrangle	چار زاوئی
Quadrantal	ربعی
Radical circle	بنیادی دائرہ
Reciprocal	متکافی
Reciprocation	مکافات
Rectilineal figures	مستقیم الاضلاع اشکال

Reenterant angles	متداخلہ زاوئے
Restricted triangles	مشروط مثلث
Row	صف
Secondaries of a circle	دائرہ کے ثانوی
Semi-harmonic	نیم موسیقی
Sense of rotation	گردش کی جہت
Sine formula	جیبی ضابطہ
Sine of a solid angle	مجسم زاویہ کی جیب
Sine of a triangle	مثلث کی جیب
Small circle	چھوٹا دائرہ
Spherical excess	کروی اضافہ
Spherical power	کروی طاقت
Spherical triangle	کروی مثلث
Stereographic projection	تسطیحی اظلال
Sub-multiple	تحت ضعفی
Superposible	انطباق پذیر
Superposition	انطباق
Supplemental	تکمیلی
Survey	پیمائش
Symmetrical	متشاکل
Tetrahedron	ذوار بعۃ السطوح یا چارسطحی
Transition case	صورت مرور
Transformation	استحالہ
Transposition	انتقال
Transversal	قاطع

Trigonometrical survey	مثلثی پیمائش
Trilinear coordinates	سہ خطی محدد
Trirectangular triangle	سہ قائمی مثلث
Universally true	کلیتاً صادق
Vanishing determinant	مقطعہ منعدم
Zone	منطقہ

